DOI 10.37882/2223-2966.2024.7.10

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА И ОЦЕНКАХ ЕЕ ОБЛАСТИ ДИССИПАТИВНОСТИ

ON THE GENERALIZATION OF THE LORENTZ SYSTEM AND ESTIMATES OF THE AREA OF ITS DISSIPATIVITY

D. Bulekbayev
A. Morozov

Summary. A finite–dimensional (discrete) model is considered — a system of differential equations describing the generation of radiation in a quantum generator. It is assumed that two lines of the active substance radiate within the same resonator mode. Estimates of the dissipation range of the system are obtained. At the same time, the second Lyapunov method, the techniques of N.G. Chetaev and G.A. Leonov were used.

Keywords: generalized Lorentz system, four-dimensional phase space, dissipativity domain.

Булекбаев Дастанбек Абдыкалыкович
докт. технических наук, доцент,
ФГБОУ ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», г. Санкт-Петербург
Морозов Алексей Валентинович
канд. физ.-мат. наук, профессор,
ФГБОУ ВПО «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского», г. Санкт-Петербург
vka@mil.ru

Аннотация. Рассматривается конечномерная (дискретная) модель — система дифференциальных уравнений, описывающая генерацию излучения в квантовом генераторе. Предполагается, что в пределах одной моды резонатора излучают две линии активного вещества. Получены оценки области диссипативности системы. При этом были использованы второй метод Ляпунова, приемы Н.Г. Четаева и Г.А. Леонова.

Ключевые слова: обобщенная система Лоренца, четырехмерное фазовое пространство, область диссипативности.

Введение

Детерминированный хаос — одно из открытий второй половины XX века. Пионерской работой в этом направлении была статья американского метеоролога Э. Лоренца [1], в которой была рассмотрена нелинейная трехмерная математическая модель конвективного течения жидкости в плоском слое весьма простого вида, но демонстрирующая в численных расчетах сложное поведение траекторий. Статья. по началу, была воспринята в научном сообществе с осторожностью, ибо, если и не противоречила качественной теории дифференциальных уравнений, то, по крайней мере, моделей с таким сложным поведением было мало. Кроме того, приведенные в статье результаты обратили на себя внимание тем, что достаточно адекватно отражали физические эксперименты по конвективному течению жидкости и связывались с явлениями турбулентности. К настоящему времени, исследований, посвященных этой модели сотни, и она заняла почетное место в ряду классических. Изучению подверглись и многочисленные обобщения системы Лоренца, связанные с другими физическими явлениями, а также в целом многочисленные конечномерные модели, систем с распределенными параметрами.

Обобщенная модель Лоренца

В настоящей статье рассматривается одно из обобщений системы Лоренца. Это — система укороченных уравнений в безразмерных переменных, описывающая одномодовую генерацию излучения в квантовом генераторе. Предполагается, что в пределах одной моды резонатора излучают две линии активного вещества

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -dx + dy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + \left(1+\xi^2\right)x\tilde{z}_1 + \xi\tilde{z}_2, \\ \dfrac{d\tilde{z}_1}{dt} = -b\left(\tilde{z}_1 - r\right) - \left(r-1\right)xy, \\ \dfrac{d\tilde{z}_2}{dt} = -\tilde{z}_2 - \xi y. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x — амплитуда электрических колебаний поля, y — мнимая часть поляризации, $\tilde{z}_2$ — вещественная часть поляризации, $\tilde{z}_1$ — полусумма числа активных частиц. Параметры $d = \dfrac{\omega_0\tau_2}{2Q}$ –безразмерная постоянная затухания поля в резонаторе, $r = 4\pi I\tau_1\tau_2 Q\left|\mu_0\right|^2 h$ — параметр накачки, $b = \dfrac{\tau_2}{\tau_1}$; ω_0 — частота излучения, I — интенсивность накачки активной среды, τ_2 — время релаксации поляризации, определяющее ширину спектральной линии, τ_1 — время релаксации населенности уровней; μ_0 — матричный элемент дипольного момента частиц среды, взаимодействующих с излучением; Q — добротность резонатора; ξ — отстройка линий собственных частот атомов от центральной частоты.

Модель (1) впервые была анонсирована в работе А.Н. Ораевского [2]. В статье [3] проведено численное исследование различных режимов генерации.

Отметим два простейших свойства модели (1).

1. Она симметрична по отношению к замене:

$$x \to -x,\, y \to -y,\, \tilde{z}_2 \to -\tilde{z}_2,\, \tilde{z}_1 \to \tilde{z}_1.$$

2. Ее фазовый объём равномерно сжимается, так как дивергенция векторного поля $\boldsymbol{F}$, задаваемого правыми частями уравнений (1) отрицательна [4]:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\tilde{z}}_1}{\partial \tilde{z}_1} + \frac{\partial \dot{\tilde{z}}_2}{\partial \tilde{z}_2} = -d - 3 < 0.$$

Отсюда заключаем, что объём притягивающего множества нулевой.

Систему (1) перепишем в других переменных. Для этого положим

$$x_1 = \sqrt{r-1}x,\, y_1 = \sqrt{r-1}y,\, \bar{z}_1 = r - \tilde{z}_1,\, \bar{z}_2 = \sqrt{r-1}\tilde{z}_2$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -d\left(x_1 - y_1\right), \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + r\left(1+\xi^2\right)x_1 - \left(1+\xi^2\right)x_1\bar{z}_1 + \xi\bar{z}_2, \\ \dfrac{d\bar{z}_1}{dt} = -b\bar{z}_1 + x_1y_1, \\ \dfrac{d\bar{z}_2}{dt} = -\bar{z}_2 - \xi y_1. \end{cases} \qquad (2)$$

Отметим, что при $\xi = 0$ собственная частота резонатора совпадает с частотой слившихся в одну линий излучения. Это случай строгого резонансного взаимодействия поля со средой. Система (2) при этом редуцируется в классическую систему Лоренца и уравнение $\frac{d\bar{z}_2}{dt} = -\bar{z}_2$. Ясно, что компонента $\bar{z}_2$ с течением времени исчезает: $\bar{z}_2(t) = \bar{z}_2^0 e^{-t} \to 0 \left(\bar{z}_2^0 = \text{const}\right)$.

Несложно убедиться, что в пространстве параметров системы (2) d, r, ξ, b плоскость $r = 1$ является бифуркационной, так как:

1) при $r < 1$ не выполняются пороговые условия генерации — система имеет одно устойчивое по Ляпунову положение равновесия

$$C_0\left(x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \bar{z}_1 = 0, \quad \bar{z}_2 = 0\right),$$

отвечающее отсутствию генерации излучения,

2) при $r > 1$ возникают условия самовозбуждения генератора и в системе (2) возникают три положения равновесия, два из которых

$$C_{1,2}\begin{pmatrix} x_1 = \pm\sqrt{b(r-1)}; y_1 = \pm\sqrt{b(r-1)}; \\ \bar{z}_1 = r-1; \bar{z}_2 = \pm\sqrt{b(r-1)} \end{pmatrix}$$

отвечают режимам генерации постоянной амплитуды и различаются фазой поля. Проводя линейный анализ, несложно показать, что положения равновесия $C_{1,2}$ устойчивы по Ляпунову, при этом положение равновесия C_0 становится неустойчивым (седловой особой точкой).

Перейдём теперь к доказательству диссипативности [4] системы (2). Для этого введём в рассмотрение обозначения

$$\lambda_0 = \min\{1, b, d\}, \lambda \in [0, \lambda_0], \gamma > 0,\ \theta \in [\theta_-, \theta_+],$$

где $\theta_\pm = d + r\left(1+\xi^2\right)\gamma \pm 2\sqrt{\gamma(d-\lambda)(1-\lambda)}$,

$$\Gamma = \frac{\theta^2(b-2\lambda)^2}{8\lambda(b-\lambda)\left(1+\xi^2\right)\gamma}$$

$$\alpha = \frac{\theta^2 b^2}{4\lambda(b-\lambda)\left(1+\xi^2\right)\gamma(1+\gamma)}$$

функцию

$$W\left(x_1, y_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2\right) = \\ = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + \gamma\left(1+\xi^2\right)\bar{z}_1^2 + \gamma\left(\bar{z}_2^2 + y_1^2\right)\right] - \theta\bar{z}_1$$

и множества

$$\Phi_1 = \left\{x_1, y_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \,\middle|\, W\left(x_1, y_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2\right) \le \Gamma,\ x_1 > \sqrt{\alpha}\right\},$$

$$\Phi_2 = \left\{x_1, y_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2 \,\middle|\, W\left(x_1, y_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2\right) \le \Gamma,\ x_1 < -\sqrt{\alpha}\right\}.$$

Заметим, что уравнению $W = \text{const}$ при фиксированном значении параметра $\gamma > 0$ отвечает в фазовом пространстве системы (2) семейство эллипсоидов, центр симметрии которых сдвинут по оси $0\bar{z}_1$ и определяется значением параметра $\theta \in [\theta_-, \theta_+]$. При $\gamma \to +\infty$ уравнение $W = \Gamma$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей осью $0x_1$.

Утверждение 1. Для любой фазовой траектории $x_1 = x_2(t), y_1 = y_2(t), \bar{z}_1 = \bar{z}_1(t), \bar{z}_2 = \bar{z}_2(t)$ системы (2) имеет место неравенство:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} W\left(x_1, y_1, \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)\right) \le \Gamma.$$

Доказательство. Нетрудно убедится, что для функции $W\left(x_1, y_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2\right)$ и её производной $\frac{dW}{dt}$, вычисленной в силу дифференциальных уравнений системы (2), справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{dW}{dt} + 2\lambda W =$$
$$= -(d-\lambda)x_1^2 + \left[d + r\gamma(1+\xi^2) - \theta\right]x_1y_1 - \gamma(1-\lambda)y_1^2 -$$
$$-(1+\xi^2)\gamma(b-\lambda)\bar{z}_1^2 - \gamma(1-\lambda)\bar{z}_2^2 - \theta(b-2\lambda)\bar{z}_1 \le$$
$$\le -(1+\xi^2)\gamma(b-\lambda)\bar{z}_1^2 - \theta(b-2\lambda)\bar{z}_1 \le 2\lambda\Gamma.$$

Отсюда вытекает, что для произвольной траектории $x_1(t), y_1(t), \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)$ выполняется

$$\frac{d}{dt}\left[W(x_1(t), y_1(t), \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)) - \Gamma\right] +$$
$$+2\lambda\left[W(x_1(t), y_1(t), \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)) - \Gamma\right] \le 0$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{d}{dt}\left\{\left[W(x_1(t), y_1(t), \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)) - \Gamma\right]e^{2\lambda t}\right\} \le 0.$$

Интегрируя это неравенство от 0 до t_1 окончательно получаем

$$W(x_1(t_1), y_1(t_1), \bar{z}_1(t_1), \bar{z}_2(t_1)) - \Gamma \le$$
$$\left[W(x_1(0), y_1(0), \bar{z}_1(0), \bar{z}_2(0)) - \Gamma\right]e^{-2\lambda t_1}$$

Полученное неравенство выполняется для любого $t_1 \ge 0$. Это и доказывает утверждение 1.

Замечание. Использованный, при доказательстве утверждения 1, прием неоднократно применялся Г.А. Леоновым (см., например,[5]), в статье [6] также использовался этот прием.

Утверждение 2. Если при некотором t фазовая точка системы (2) находится в множестве Φ_1, то $\frac{dx_1(t)}{dt} < 0$, если в множестве Φ_2, то $\frac{dx_1(t)}{dt} > 0$.

Доказательство. Рассмотрим первую часть утверждения. Пусть при некотором t фазовая точка $(x_1(t), y_2(t), \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)) \in \Phi_1$, а $\frac{dx_1(t)}{dt} \ge 0$. Тогда из первого уравнения системы (2) следует, что $y_1(t) \ge x_1(t) > \sqrt{\alpha}$. Оценим теперь значение функции $W(x_1, y_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ на траектории в момент t. Будем иметь

$$W(x_1(t), y_1(t), \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\left[\alpha + \gamma\alpha + \gamma(1+\xi^2)\bar{z}_1^2 - 2\theta\bar{z}_1 + \gamma\bar{z}_2^2\right] \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\alpha(1+\gamma) + \gamma(1+\xi^2)\left(\bar{z}_1 - \dfrac{\theta}{\gamma(1+\xi^2)}\right)^2 - \\ -\dfrac{\theta}{\gamma(1+\xi^2)}\end{array}\right] \ge \Gamma.$$

Полученное противоречие доказывает первую часть утверждения 2.

Аналогично доказывается и вторая часть.

Следствие. Из доказанных утверждений вытекает ограниченность всех решений системы (1) на промежутке $[0,+\infty]$ и справедливость оценки на амплитуду электрических колебаний поля

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, x_1^2(t) \le$$
$$\le \frac{b^2}{1+\xi^2}\min_{\substack{\lambda\in[0,\pi_0]\\ \gamma>0}} \frac{\left[d + r(1+\xi^2)\gamma - 2\sqrt{\gamma(d-\lambda)(1-\lambda)}\right]^2}{4\lambda(b-\lambda)\gamma(1+\gamma)}.$$

Заключение

Приведенные утверждения могут быть использованы для анализа режимов генерации в квантовых генераторах, в частности, при исследовании устойчивости режимов стационарной генерации, описываемые моделью (1) [7,8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Science, 1963. Vol. 20, № 2. P. 130–141. (Странные аттракторы: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. С. 88–116).
2. Ораевский А.Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т.8. № 1, С.130–142.
3. Ораевский А.Н., Проценко И.Е., Сафонова М.А., Торонов В.Ю. Динамические режимы в лазере с двумя резонансными линиями активной среды // Изв. Вузов — Радиофизика, 1988, 31, № 3, с. 300–311.
4. Бригаднов И.А., Булекбаев Д.А., Морозов А.В. О двух трактовках понятия диссипативности в теории динамических систем. В сборнике: Современные образовательные технологии в подготовке специалистов для минерально-сырьевого комплекса. Сборник научных трудов IV Всероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 2021. С. 452–457.
5. Леонов Г.А. О глобальной устойчивости системы Лоренца // Прикл. мат. и мех. 1983, Т.47, № 5 , С. 861–863.
6. Морозов А.В. Достаточные условия глобальной асимптотической устойчивости жидкого гироскопа // Перспективы науки. 2022. №6. С. 26–30.
7. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров / Я.И. Ханин. — М.: Наука; Физматлит, 1999. — 356 с.
8. Глазков, Д.В. Уравнения динамики лазера: уч. Пособие / Д.В. Глазков, И.С. Кащенко; Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2012. — 128 с.