ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА VES-ФУНКЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

THE USE OF PRODUCTION VES-FUNCTIONS TO SIMULATE THE FUNCTIONING OF THE SOCIO-ECONOMIC SYSTEMS

G. Sokol

Summary. The article presents the results of a comparative analysis of the functioning of economic systems modeling using known analytical dependence for VES-function, and the author of the proposed algorithm for constructing this type of production functions, which showed the feasibility of using it to solve problems of this kind. In the simulation used the statistics published in the press.

Key words: Production function, substitution of labor by capital, the elasticity of substitution of capital for labor, variable elasticity.

Сокол Глеб Андреевич
Аспирант, Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск)
sokolgleb@gmail.com

Аннотация. В статье представлены результаты сравнительного анализа моделирования функционирования экономических систем с использованием известных аналитических зависимостей для VES-функций и предложенного автором алгоритма построения производственных функций этого вида, которые показали целесообразность его использования для решения задач такого вида. При моделировании использовались статистические данные, опубликованные в открытой печати.

Ключевые слова: производственная функция, эластичность замещения труда капиталом, переменная эластичность замещения труда капиталом.

1. Введение

Определение основных показателей, как функционирования экономических и производственных систем осуществляется, как правило, с использованием производственных функций (ПФ). Последние являются одним из инструментов экономико-математического моделирования процесса производства, если его рассматривать как открытую систему, входами которой являются затраты ресурсов (материальных и людских), а выходы представляют собой производимую продукцию. Производственные функции чаще всего используются для анализа влияния ряда ключевых факторов (входов) на результаты процесса производства (выхода). Это обусловлено тем, что ПФ в целом отражают достаточно устойчивые количественные соотношения между его входами и выходами.

Наибольшее распространение при моделировании функционирования экономических систем получили ПФ, известные как неоклассические производственные функции. Это обусловлено, во-первых, тем, что они оперируют, как правило, только двумя факторами затрат производства — агрегированными факторами затрат труда L и капитала K, оказывающими наиболее существенное влияние на результирующий параметр функционирования данных систем — объем производства Y, а, во-вторых, для определенного вида этих функций — CES — функций (constant elasticity substitution production function) получены аналитические выражения с учетом ключевых свойств неоклассических производственных функций.

Вместе с тем, сложность экономических систем, для описания функционирования которых применяются неоклассические производственные функции вида CES-функции, не всегда позволяет утверждать, что значения эластичности замещения труда капиталом σ в рассматриваемых системах постоянны, поскольку данная ситуация является наименее распространенной в реальных условиях функционирования экономических систем.

Видом неоклассических производственных функций, учитывающим изменения значений эластичности замещения труда капиталом σ в экономических системах, являются VES-функции (variable elasticity substitution production function). В настоящее время известен ряд вариантов аналитического представления производственной функции вида VES-функция (табл. 1). Все параметры A, a, b, c, α, β, λ представленных в табл. 1 VES-функций оценивались авторами работ [1,2] на основании статистического анализа ретроспективных данных, характеризующих функционирование экономической системы. Сделанные этими авторами допущения относительно характера взаимосвязей между γ, σ и k, обеспечивают как изменения значений σ в зависимости от величины k, так и выполнение требований, предъявляемым к неоклассическим производственным функциям [3].

Таблица 1. Производственные функции вида VES-функции

Автор	Предельная норма замещения труда капиталом γ	Эластичности замещения труда капиталом σ	Общий вид VES-функции
Реванкар (Revankar N. S.) [1]	$\gamma = \alpha + \beta k,$ $\begin{cases} \beta > 0, \\ -\alpha/\beta < k. \end{cases}$	$\sigma(k) = 1 + \left(\alpha/\beta\right) k^{-1}; \alpha < 0, \alpha > 0;$ $\begin{cases} \sigma(k) < 1, \sigma(k) > 1, \\ \frac{d\sigma(k)}{dk} < 1, \frac{d\sigma(k)}{dk} > 1. \end{cases}$	$Y = Ae^{\lambda t}\left[(1+\beta)KL^{\beta} + \alpha L^{1+\beta}\right]^{1/1+\beta}$
Фергюсон (Ferguson C.) [2]	$\gamma = k\left(\frac{1}{\alpha + \beta k} - 1\right),$ $\begin{cases} 0 < \alpha < 1, \\ 0 < \alpha + \beta k < 1. \end{cases}$	$\sigma(k) = 1 - \frac{\beta k}{(\alpha + \beta k)^2 - \alpha}; \beta < 0, \beta > 0;$ $\begin{cases} \sigma(k) < 1, \sigma(k) > 1, \\ \frac{d\sigma(k)}{dk} < 1, \frac{d\sigma(k)}{dk} > 1. \end{cases}$	$Y = Ae^{\lambda t} K^{\alpha} L^{1-\alpha} e^{\beta k}$

Для использования приведенных в табл. 1 вариантов VES-функций необходимо дополнительно обосновывать возможность описания изменений величин γ и σ принятыми зависимостями.

В работе [4] предложена более общая методика построения неоклассических производственных функций вида VES-функции и представлены результаты реализации этой методики применительно к данным о функционировании экономики СССР в период с 1947 по 1966 г.г. [5]. Сравнительный анализ полученных расчетных значений Y и значений этого показателя, полученных с использованием производственных функций вида CES-функции [5], показывает более высокую точность оценок рассматриваемого показателя, получаемых по методике работы [4].

В данной статье представлены результаты сравнительного анализа оценок значений Y, полученных с использованием производственных функций вида VES-функции (табл. 1) и построенной по методике работы [4] по данным о функционировании экономики США, приведенным в работе [6].

2. Построение δ-однородных производственных функций типа VES-функция

Идентификация структуры производственной функции осуществляется в результате решения следующей системы дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} \frac{g'(k)}{g(k)} = \frac{\delta}{\gamma(k) + k}, \\ \frac{\gamma'(k)}{\gamma(k)} = \frac{1}{k\sigma(k)}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь δ — показатель однородности производственной функции; k — фондовооруженность: $k = K/L$; $g(k)$ — модифицированная производственная функция:

$$Y = f(K, L) = L^{\delta} f(1, k) \Rightarrow \frac{Y}{L^{\delta}} = y = f(1, k) = g(k). \quad (4)$$

$\gamma(k)$ — предельная норма замещения труда капиталом; $\sigma(k)$ — эластичностью замещения труда капиталом для δ — однородной производственной функции.

Величина $\sigma(k)$ задается некоторой функцией, а $\gamma(k)$ и $g(k)$ определяются из решения системы (3). Непосредственно $f(K, L)$ определяется по функции $g(k)$ согласно (4). В работе [4] доказано существование и единственность решения системы (3), что позволяет осуществить построение δ — однородной производственной функции типа VES-функция.

При заданном значении δ (выбор значения $\delta \in (0, 1]$ осуществляется согласно предварительно сформулированному оптимизационному критерию) достаточно построить функцию $g(k)$, которую можно определить следующими выражениями с учетом структуры функции $\sigma(k)$ [4]:

$$\gamma(k) = b \cdot \exp\left(\int_a^k \frac{dt}{\sigma(t)t}\right). \quad (5)$$

$$g(k) = c \cdot \exp\left(\int_a^k \frac{\delta dt}{\gamma(t) + t}\right), \quad (6)$$

где a, b, c — некоторые положительные постоянные.

В качестве $\sigma(k)$ можно выбрать, например, некоторую непрерывную кусочно-линейную функцию.

При построении функции $g(k)$ необходимо обеспечить выполнение основных свойств неоклассических производственных функций [4], в том числе:

$$\frac{dg(k)}{dk} > 0 \Rightarrow \delta g(k) - k\frac{dg(k)}{dk} > 0\,. \quad (7)$$

$$\frac{d^2g(k)}{dk^2} < 0 \Rightarrow \delta(\delta-1)g(k) + 2k(1-\delta)\frac{dg(k)}{dk} + $$

$$+k^2\frac{d^2g(k)}{dk^2} < 0. \quad (8)$$

Исходными данными для построения неоклассической δ — однородной производственной функции типа VES-функция являются множества значений объемов выпуска продукции $Y = f(L, K)$ — $Y = \{Yi\}$, $(i = 1,\ldots,n)$ и соответствующие значения $K = \{K_i\}$, $L = \{L_i\}$ в стоимостном или индексном выражении, характеризующие функционирование рассматриваемой экономической системы в каждый момент времени *Ti* в течение определенного интервала времени [*T1*, *Tn*]. Также задаются значения показателя однородности $\delta_j : \delta_j \in \left]0,1\right]$. По этим данным определяются значения фондовооруженности рассматриваемой экономической системы:

$k_i = K_i/L_i$ и значения функции $g^{\delta_j}(k_i)$

при фиксированном значении δ_j: δ_j : $g^{\delta_j}(k_i) = \dfrac{Y_i}{L_i^{\delta_j}}$.

Далее выполняются следующие процедуры.

1. Значения функции $g^{\delta_j}(k_i)$ упорядочиваются по возрастанию значений k_i, формируя ряд g_{lj} $(l = 1 \ldots nl;\ nl = n)$.

2. Значения g_{lj} апроксимируются функциями $\tilde{g}_{lj}$, удовлетворяющими требованию

$$F_j = \sum_{l=1}^{n_l}\left(g_{lj} - \tilde{g}_{lj}\right)^2 \to min. \quad (9)$$

с учетом неравенства $0 < \sigma \le 1$ и ряда ограничений, включая (7,8), в которых дифференциальные неравенства заменяются на их разностные аналоги:

$$\delta_l\tilde{g}_{lj} - k_l\frac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l} > 0;\ \frac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l} > 0;$$

$$\frac{\dfrac{\tilde{g}_{l+2j} - \tilde{g}_{l+1j}}{k_{l+2} - k_{l+1}} - \dfrac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l}}{k_{l+1} - k_l}. \quad (10)$$

$$\delta_j\left(\delta_j - 1\right)\tilde{g}_{lj} + 2k_l\left(1-\delta_j\right)\frac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l} + $$

$$+k_f^2\,\frac{\dfrac{\tilde{g}_{l+2j} - \tilde{g}_{l+1j}}{k_{l+2} - k_{l+1}} - \dfrac{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}}{k_{l+1} - k_l}}{k_{l+1} - k_l} < 0. \quad (11)$$

$$\sigma_{lj} = \frac{\left(k_{l+1j} - k_{lj}\right)\left(\gamma_{l+1j} + \gamma_{lj}\right)}{\left(\gamma_{l+1j} - \gamma_{lj}\right)\left(k_{l+1j} + k_{lj}\right)} \le 1. \quad (12)$$

$$\gamma_{lj} = \delta_j \cdot \tilde{g}_{lj}\,\frac{k_{l+1j} - k_{lj}}{\tilde{g}_{l+1j} - \tilde{g}_{lj}} - k_{lj}\,. \quad (13)$$

3. По значениям $\tilde{g}_{lj}$ согласно (12,13) определяются значения величин γ_{lj} и σ_{lj}.

4. Полученные значения σ_{lj} σ_{lj} при допущении $\sigma_{n_l} = \sigma_{n_l-1} = \sigma_{n_l-2}$ апроксимируются кусочно-линейными функциями с параметрами:

$$e_l = \frac{\sigma_{l+1j} - \sigma_{lj}}{k_{l+1} - k_l}, d_l = \frac{\sigma_{lj}\cdot k_{l+1} - \sigma_{l+1j}\cdot k_l}{k_{l+1} - k_l},\ (l = 1 \ldots n_l) \quad (14)$$

5. Согласно (5) с учетом (14) рассчитываются значения γ_{lj} $(l = 1,\ldots, nl)$:

$$\bar{\gamma}_{lj} = \bar{\gamma}_{l-1j}\cdot\exp\left(\int_{k_l}^{k_{l+1}}\frac{dt}{\left(e_l\cdot t + d_l\right)t}\right).$$

Для $l = 1$ значение $\bar{\gamma}_{lj}$ определяется выражением (13).

6. Полученные значения $\bar{\gamma}_{lj}$ по аналогии с (14) апроксимируются кусочно-линейными функциями вида $v_l\cdot t + w_l$.

7. На основании (6) при допущении, что для $l = 1$ значение $\bar{g}_{lj} = \tilde{g}_{lj}$, рассчитываются значения функции $\bar{g}_{lj}$:

$$\bar{g}_{lj} = \bar{g}_{l-1j}\cdot\exp\left(\int_{k_l}^{k_{l+1}}\frac{\delta_j dt}{\left(v_l\cdot t + w_l\right) + t}\right),$$

где v_l, w_l — параметры кусочно — линейных функций, используемых для аппроксимаций $\bar{\gamma}_{lj}$.

8. Определяется относительная погрешность $\bar{\gamma}_{lj}$:

$$\varepsilon_{lj} = \left|\frac{\bar{g}_{lj} - g_{lj}}{g_{lj}}\right| \quad (15)$$

и соответствующая ей величина среднеквадратического отклонения $s_{\varepsilon_{lj}}$.

Из всех вариантов построенных функций $\bar{g}_{lj}$ выбирается тот, который обеспечивает наименьшее

Таблица 2. Зависимости для VES-функций [2]

№	Интервал	Вид производственной функции VES-функция [2]	Интервал	Значения σ
ПФ1	1943–1968	$Y = 6,2705e^{0,0183t}\left(7,7501KL^{6,7501} - \dots - 0,3025L^{7,7501}\right)^{0,129}$	1947–1968	$1-0,0448k^{-1}$
ПФ2	1943–1968	$Y = 21,5091e^{0,0181t}K^{0,4657}L^{0,5343}e^{-2,5361k}$	1947–1968	$1+\frac{ak}{[b-ak]^2-b}$ $a = 2,5361;$ $b = 0,4657.$

Таблица 3. Значения производственных функций ПФ1 и ПФ3, рассчитанные за период с 1947 по 1968 г.г.

Год	Y	ПФ1	$\sigma_{ПФ1}$	$\varepsilon_{ПФ1}$	ПФ3	$\sigma_{ПФ3}$	$\varepsilon_{ПФ3}$
1947	77657	80706	0,6450	0,0393	79790	0,1303	0,0275*
1948	83484	84846	0,6503	0,0163	85049	0,1303	0,0187
1949	79274	82733	0,6524	0,0436	83339	0,1303	0,0513
1950	91946	88320	0,6549	0,0394	89332	0,0188	0,0284
1951	101840	96303	0,6564	0,0544	97694	0,1477	0,0407
1952	102199	100519	0,6578	0,0164	102117	0,0003	0,0008
1953	109438	107124	0,6593	0,0211	109033	0,0303	0,0037
1954	102252	104651	0,6559	0,0235	106043	0,0565	0,0371
1955	116237	110348	0,6572	0,0507	112000	0,0028	0,0365
1956	119274	115481	0,6570	0,0318	117214	0,0428	0,0173
1957	118988	118442	0,6551	0,0046	119921	0,0393	0,0078
1958	107741	113938	0,6527	0,0575	114810	0,0158	0,0656
1959	122448	120550	0,6549	0,0155	122076	0,0112	0,0030
1960	122276	123970	0,6559	0,0139	125692	0,0469	0,0279
1961	120357	124050	0,6570	0,0307	125902	0,0659	0,0461
1962	130589	130202	0,6583	0,0030	132401	0,0833	0,0139
1963	135569	133921	0,6598	0,0122	136341	0,0612	0,0057
1964	144393	139093	0,6611	0,0367	141943	0,1527	0,0170
1965	156481	148015	0,6624	0,0541	151161	0,1381	0,0340
1966	172171	160303	0,6637	0,0689	163861	0,1404	0,0483
1967	172015	166292	0,6654	0,0333	170307	0,1973	0,0099
1968	181604	173278	0,6674	0,0458	177808	0,1623	0,0209
Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ1}$				0,0324	Среднее значение $\overline{\varepsilon}_{ПФ3}$		0,0255
Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ1}}$				0,0184	Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ3}}$		0,0178
* — здесь и далее выделены меньшие значения εПФ3 по отношению к сравниваемой производственной функции.							

значение среднеквадратического отклонения $s_{\varepsilon_{lj}}$ величины ε_{lj} и представляющий собой, в конечном итоге, неоклассическую δ-однородную производственную функцию типа VES-функция, описывающую функционирование рассматриваемой экономической системы в течение определенного интервала времени *[T1, Tn]*.

Совокупность, приведенных выше процедур п.п. 1–8, в целом формирует алгоритм построения δ-однородной производственной функции типа VES-функция. Алгоритм был реализован с помощью пакета MatLab 7.0.

3. Апробация алгоритма построения δ-однородной производственной функции типа VES-функция

Апробация описанного выше алгоритма была осуществлена при построении δ-однородных производ-

Таблица 4. Значения производственных функций ПФ2 и ПФ3, рассчитанные за период с 1947 по 1968 г.г.

Год	Y	ПФ2	$\sigma_{ПФ2}$	$\varepsilon_{ПФ2}$	ПФ3	$\sigma_{ПФ3}$	$\varepsilon_{ПФ3}$
1947	77657	80832	0,2799	0,0409	79790	0,1303	0,0275
1948	83484	84914	0,2714	0,0171	85049	0,1303	0,0187
1949	79274	83780	0,2677	0,0568	83339	0,1303	0,0513
1950	91946	88342	0,2637	0,0392	89332	0,0188	0,0284
1951	101840	96306	0,2610	0,0543	97694	0,1477	0,0407
1952	102199	100502	0,2587	0,0166	102117	0,0003	0,0008
1953	109438	107087	0,2560	0,0215	109033	0,0303	0,0037
1954	102252	104664	0,2619	0,0236	106043	0,0565	0,0371
1955	116237	110343	0,2596	0,0507	112000	0,0028	0,0365
1956	119274	115482	0,2600	0,0318	117214	0,0428	0,0173
1957	118988	118473	0,2632	0,0043	119921	0,0393	0,0078
1958	107741	114007	0,2673	0,0582	114810	0,0158	0,0656
1959	122448	120589	0,2637	0,0152	122076	0,0112	0,0030
1960	122276	123991	0,2619	0,0140	125692	0,0469	0,0279
1961	120357	124050	0,2600	0,0307	125902	0,0659	0,0461
1962	130589	130179	0,2578	0,0031	132401	0,0833	0,0139
1963	135569	133870	0,2550	0,0125	136341	0,0612	0,0057
1964	144393	139011	0,2528	0,0373	141943	0,1527	0,0170
1965	156481	147901	0,2505	0,0548	151161	0,1381	0,0340
1966	172171	160151	0,2482	0,0698	163861	0,1404	0,0483
1967	172015	166090	0,2450	0,0344	170307	0,1973	0,0099
1968	181604	173010	0,2414	0,0473	177808	0,1623	0,0209
Среднее значение $\bar{\varepsilon}_{ПФ1}$				0,0334	Среднее значение $\bar{\varepsilon}_{ПФ3}$		0,0255
Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ1}}$				0,0191	Среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{ПФ3}}$		0,0178

ственных функций типа VES-функция по данным, характеризующим функционирования экономики США в период с 1947 г. по 1968 г. [6].

В табл. 2 приведены производственные функции вида VES-функция ПФ1 и ПФ2 (здесь и далее обозначения автора) и соответствующие им регрессионные зависимости для оценки значений σ.

В табл. 3 совместно представлены следующие данные:

- значения Y — реальный национальный доход экономики США в млн. долларов 1958 г. [2];
- значения Y, рассчитанные с использованием производственной функции ПФ1 (табл. 2) и по предложенному выше алгоритму построения неоклассической δ-однородной (при $\delta = 1$) производственной функции типа VES-функция, обозначенной автором, как функция ПФ3;
- значения σ для функции ПФ1 — $\sigma_{ПФ1}$ (табл. 2) и рассчитанные по предложенному алгоритму при построении ПФ3 — $\sigma_{ПФ3}$;
- величины ε_{lj} (15), среднего значения относительной ошибки $\bar{\varepsilon}_j$ и ее среднеквадратическое отклонение $s_{\varepsilon_{lj}}$ для функций ПФ1 и ПФ3, обозначенные $\varepsilon_{ПФ1}$, $\bar{\varepsilon}_{ПФ1}$, $s_{\varepsilon_{ПФ1}}$ и εПФ3, $s_{\varepsilon_{ПФ1}}$, $s_{\varepsilon_{ПФ3}}$ соответственно.

В табл. 4 представлены данные для функций ПФ2 (табл. 2) и ПФ3. Структура табл. 4 и обозначения в ней данных аналогичны табл. 3.

Оценка точности аппроксимации исходных данных ПФ1 и ПФ2 (табл. 2) и построенной δ-однородной производственной функции типа VES-функция (ПФ3) осуществлялась сопоставлением соответствующих значений величин $\bar{\varepsilon}_{ПФ1}$, $\bar{\varepsilon}_{ПФ2}$, $\bar{\varepsilon}_{ПФ3}$, $s_{\varepsilon_{ПФ1}}$, $s_{\varepsilon_{ПФ2}}$, $s_{\varepsilon_{ПФ3}}$.

5. Заключение и выводы

Сравнение значений $\varepsilon_{ПФ1}$, $\varepsilon_{ПФ2}$, $\varepsilon_{ПФ3}$ (табл. 3 и 4) позволяют сделать вывод о том, что предложенный автором алгоритм построения производственной функции типа VES-функция позволяет получить более точное приближение 65% значений величины конечного продукта экономической системы Y к исходным данным. В остальных точках ошибка приближения не превышает 6,5%.

Значения средней ошибки аппроксимации исходных данных и ее среднеквадратического отклонения (табл. 3 и 4) для построенной автором производственной функции типа VES-функция (ПФ3) меньше, чем для ранее разработанных VES-функций (ПФ1 и ПФ2). Это позволяет сделать вывод о том, что предлагаемый в данной статье алгоритм построения производственных функций типа VES-функция дает более «устойчивое» приближение расчетных значений величины Y к ее исходным значениям.

Таким образом, заключить, что реализованный алгоритм построения δ-однородной производственной функции типа VES-функция, отвечающей требованиям, предъявляемым к неоклассическим производственным функциям, позволяет обеспечить построение указанной функцией с достаточно высокой точностью аппроксимации данных, характеризующих функционирование экономической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Revankar N. S. A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions // Econometrica, 1971, Vol. 39, № 1, p.p. 61–71.
2. Ferguson C. Substitution, Technical Progress and Return to Scale// American Economic Review, LV (May, 1965), p.p. 296–305.
3. Экономико-математическое моделирование: Учебник для студентов вузов/ Под общ. Ред. И. Н. Дрогобыцкого.— М.: Издательство «Экзамен», 2004. 800 с.
4. Вольных Е. В., Кутышкин А. В., Никоноров Ю. Г. Построение δ—однородной производственной VES-функция// Сибирский журнал индустриальной математики, 2007, Том X, № 2(30), с. 31–44.
5. Бессонов В. А. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике.— М.: Институт переходной экономики, 2002, 95 с.
6. Knox Lovell C. A. Estimation and Prediction with CES and VES Production Functions // International Economic Review, 1973, Vol. 14, № 3, p.p. 676–692.