

# ВЛИЯНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМАХ

## THE INFLUENCE OF CRITICAL EFFECTS ON ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN TWO-PHASE SYSTEMS

**M. Palvanov  
L. Uvarova**

*Summary.* The paper investigates acoustic wave propagation in two-phase gas-liquid systems considering critical effects near the critical point. A mathematical model is developed that incorporates power-law (critical) dependencies of thermodynamic parameters and transport coefficients typical for simple fluids belonging to the 3D Ising universality class. A dispersion relation connecting wave number and frequency with thermodynamic state is obtained. Significant decrease in sound velocity and sharp increase in attenuation near the critical point are shown. Shift of maximum attenuation to low-frequency region is established. A numerical algorithm with adaptive time step is proposed.

*Keywords:* acoustic waves, two-phase systems, critical effects, mathematical modeling, sound attenuation, bulk viscosity.

**Палванов Мурод Равшанович**  
Аспирант, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»  
m.palvanov@stankin.ru

**Уварова Людмила Александровна**  
Доктор ф.-м. наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»  
uvar11@yandex.ru

*Аннотация.* В работе исследуется распространение акустических волн в двухфазных газо-жидкостных системах с учетом критических эффектов при приближении к критической точке. Разработана математическая модель, учитывающая степенные (критические) зависимости термодинамических параметров и коэффициентов переноса, характерные для простых жидкостей (трехмерный класс универсальности Изинга). Получено дисперсионное соотношение, связывающее волновое число и частоту с термодинамическим состоянием. Показано существенное снижение скорости звука и резкое увеличение затухания вблизи критической точки. Установлено смещение максимума затухания в низкочастотную область. Предложен численный алгоритм с адаптивным временным шагом.

*Ключевые слова:* акустические волны, двухфазные системы, критические эффекты, математическое моделирование, затухание звука, объемная вязкость.

### Введение

Распространение акустических волн в двухфазных газо-жидкостных системах представляет интерес для ультразвуковой диагностики многофазных потоков и мониторинга технологических процессов. Вблизи критической точки наблюдается резкий рост флуктуаций плотности, приводящий к степенным изменениям термодинамических свойств жидкости. Эти зависимости подчиняются универсальным законам (критические степенные зависимости), общим для простых жидкостей, относящихся к трёхмерному классу универсальности Изинга [1,2]. Исследования показывают существенное влияние на скорость звука и затухание [3].

Работы по акустике вязкоупругих жидкостей с газовыми пузырьками [4,5] и исследования отражения акустических волн [6] вносят вклад в понимание механизмов затухания. Экспериментальные исследования [7–9] демонстрируют сложную зависимость акустических ха-

рактеристик от термодинамических параметров. Обзор транспортных явлений вблизи критической точки [10] подтверждает важность учета критических эффектов.

Однако существующие модели не учитывают критические эффекты в полной мере, что ограничивает их применимость в околоскритических условиях.

Цель исследования: разработка математической модели распространения акустических волн в двухфазной системе с учетом критических зависимостей степенного типа и анализ влияния критических эффектов на характеристики распространения звука.

### Научная новизна

1. Включены критические зависимости степенного типа  $c_p(T)$ ,  $\kappa_T(T)$ ,  $\lambda(T)$  и  $\zeta(T)$  в двухфазную акустическую модель, получено дисперсионное соотношение для околоскритической области.

2. Проведено параметрическое исследование для  $T / T_c \in [0.9, 1.1]$ ,  $\alpha \in [10^{-5}, 10^{-2}]$ ,  $f \in [1 \text{ кГц}, 1 \text{ МГц}]$
3. Показана доминирующая роль объемной вязкости  $\zeta$  в околокритической области.
4. Разработан численный алгоритм с адаптивным шагом для расчетов при резких градиентах параметров.

### Математическая модель

Рассматривается одномерное распространение акустических возмущений в системе жидкость и газовые пузырьки радиуса  $R$  (м) при малой объемной концентрации  $\alpha \ll 1$  (безразм.).

Система уравнений. Неразрывность:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0,$$

где  $\rho = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_l \left( \frac{\kappa_T}{M^3} \right)$  — средняя плотность,  $v \left( \frac{M}{c} \right)$  — скорость.

Импульс:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{4}{3} \mu + \zeta \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right],$$

где  $p$  (Па) — давление,  $\mu$  (Па·с) — сдвиговая вязкость,  $\zeta$  Па·с — объемная вязкость.

Энергия:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \alpha_p T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \Phi + Q_{gl},$$

где  $c_p$  (Дж/(кг·К)) — удельная изобарная теплоемкость,  $T$ (К) — температура,  $\lambda$ (Вт/(м·К)) — теплопроводность,  $\alpha_p$  ( $K^{-1}$ ) — коэффициент объемного теплового расширения,  $\Phi$  — диссиляция,  $Q_{gl}$ (Вт/м<sup>3</sup>) — межфазный теплобмен с коэффициентом  $h \approx Nu \cdot \frac{\lambda_l}{R}$  (Вт/м<sup>2</sup>·К).

Степенные (критические) зависимости для  $\tau = \frac{|T - T_c|}{T_c} \lesssim 10^{-2} - 10^{-1}$ :

$$\kappa_T = \kappa_{T0} \tau^{-\alpha_K}, c_p = c_{p0} \tau^{-\alpha_{cp}}, \lambda = \lambda_0 \tau^{-\alpha_\lambda}, \zeta = \zeta_0 \tau^{-\alpha_\zeta},$$

где  $\kappa_T$  (Па<sup>-1</sup>) — изотермическая сжимаемость. Численные значения экспонент берутся из экспериментальных и справочных данных для конкретного флюида (воды)

и могут отличаться от универсальных индексов критической феноменологии; в расчетах выполнен чувствительный анализ по  $a$ . Для воды:  $a_K \approx 1.24$ ,  $a_{cp} \approx 0.11$ ,  $a_\lambda \approx 0.63$ ,  $a_\zeta \approx 0.67$  [10].

### Дисперсионное соотношение

Линеаризация системы относительно малых возмущений  $p = p_0 + p'$  и подстановка  $p' = P \exp[i(kx - \omega t)]$  дает обобщенное соотношение Кирхгофа-Стокса:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[ 1 + i\omega \left( \frac{\frac{4}{3}\mu + \zeta}{pc_0^2} + \frac{\gamma - 1}{pc_p c_0^2} \lambda \right) \right] + A_{\text{relax}}(\omega),$$

где  $c_0$  (м/с) — скорость звука,  $\gamma$  (безразм.) — эффективный показатель адиабаты смеси,  $A_{\text{relax}}$  (безразм.) — вклад межфазной релаксации. В околокритической жидкости  $\gamma \rightarrow 1$ , поэтому вклад теплопроводности ослабевает относительно объемной вязкости  $\zeta$ .

Отсюда коэффициент затухания:

$$\alpha_{\text{att}} = \frac{\omega^2}{2pc_0^3} \left[ \frac{4}{3} \mu + \zeta + (\gamma - 1) \frac{\lambda}{c_p} \right].$$

Скорость звука определяется соотношением Вуда при условиях:

- (i)  $\alpha \ll 1$ ;
- (ii)  $\omega \tau_T \ll 1$ ;
- (iii) малое скольжение фаз;
- (iv)  $\lambda_{ac} \gg R$  (длина акустической волны  $\gg R$ ):

$$\frac{1}{\rho c_0^2} = \frac{\alpha}{\rho_g c_g^2} + \frac{1 - \alpha}{\rho_l c_l^2}, c_l^2 = \frac{1}{\rho_l \kappa_T}.$$

Рост  $\kappa_T \sim \tau^{-1.24}$  приводит к снижению  $c_0$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

Релаксационные времена:

$$\tau_T \sim \frac{R^2}{\alpha_{th}}, \quad \alpha_{th} = \frac{\lambda_l}{\rho_l c_{p,l}} (\text{м}^2/\text{с}),$$

где  $\tau_T$ (с) — время тепловой релаксации. Максимум затухания при  $\omega \tau_T \sim 1$  дает  $f_{\max} \sim \frac{1}{2\pi\tau_T}$  (Гц).

Обозначения:  $\alpha$  — объемная концентрация газовой фазы (безразм.),  $\alpha_p$  — коэффициент объемного теплового расширения ( $K^{-1}$ ),  $\kappa_T$  — изотермическая сжимаемость (Па<sup>-1</sup>),  $\mu$  — динамическая сдвиговая вязкость (Па·с),  $\zeta$  — объемная вязкость (Па·с),  $\lambda$  — теплопроводность (Вт/(м·К)),  $c_p$  — удельная изобарная теплоемкость (Дж/(кг·К)),  $\gamma$  — эффективный показатель адиабаты смеси (безразм.),  $\lambda_{ac}$  — длина акустической волны (м).

Таблица 1.  
Номинальные параметры модели (вода, околограническая)

Параметр	Значение	Единица
$T_c$	647	К
$p_0$	0.1	МПа
$p_c$	22.1	МПа
$R$	100	мкм
$\alpha$	$10^{-5} - 10^{-2}$	безразм.
$a_k$	1.24	безразм.
$a_{cp}$	0.11	безразм.
$a_\lambda$	0.63	безразм.
$a_\zeta$	0.67	безразм.
$Nu$	2–10	безразм.

Примечание: параметры  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $a$ ,  $Nu$  являются безразмерными и определяются как отношения однотипных физических величин.

### Численный метод

Применяется конечно-разностная схема второго порядка  $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$  на сетке  $x \in [0, L]$  с шагом  $\Delta x$  (м):

$$\frac{p_i^{n+1} - 2p_i^n + p_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c_0^2(T_i^n) \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \Gamma(T_i^n) \frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\Delta t},$$

где  $\Gamma(T_i^n)$  ( $\text{с}^{-1}$ ) — коэффициент диссипации, учитывающий частотно-зависимые потери энергии, аппроксимированные методом Прони–Усталау (Prony–Oustaloup). На границах области применяются поглощающие граничные условия первого порядка по Хигдону (Higdon), предотвращающие отражение акустических волн.

Условие устойчивости: аддитивный шаг

$$\Delta t \leq 0.9 \cdot \frac{\Delta x}{\max_i [c_0(T_i^n)]}.$$

Верификация на предельных случаях: однофазная среда ( $\alpha \rightarrow 0$ ) и низкочастотный предел ( $\omega \rightarrow 0$ ) показывают сходимость  $O(\Delta x^2)$ .

### Результаты и обсуждение

Влияние температуры. При  $\tau = 0.01$  ( $T / T_c = 0.99$ ) скорость фазового распространения  $c_{ph}$  составляет около 60 % от значения при  $\tau = 0.10$ , тогда как коэффициент затухания возрастает в 8–12 раз. Это связано с ростом изотермической сжимаемости  $\kappa_T \sim \tau^{-1.24}$  и объемной

вязкости  $\zeta \sim \tau^{-0.67}$  при приближении к критической точке. Отношение  $\zeta / \mu$  достигает 50–100 в окологранической области, что подтверждает доминирующую роль объемной вязкости в энергетических потерях акустической волны.

Влияние концентрации. При увеличении объемной доли газовой фазы от  $\alpha = 10^{-5}$  до  $\alpha = 10^{-2}$  фазовая скорость уменьшается до 30–40 % от исходного значения, а затухание возрастает в 3–4 раза (при  $\tau = 0.02$ ). Это объясняется ростом эффективной сжимаемости и дополнительным вкладом межфазной релаксации.

Частотная дисперсия. Максимум затухания смещается в область низких частот по мере приближения к критической точке: при  $\tau = 0.10$  —  $f_{max} \approx 500$  кГц, при  $\tau = 0.01$  —  $f_{max} \approx 80$  кГц. Такое смещение соответствует условию  $\omega \tau \sim 1$ , где  $\tau_T$  — характерное время тепловой релаксации.

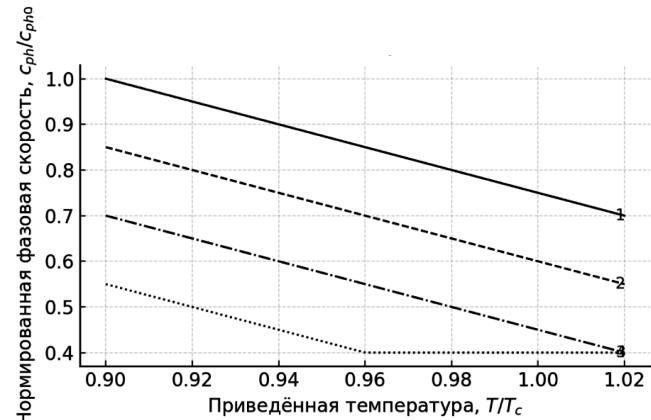


Рис. 1. Зависимость нормированной фазовой скорости  $c_{ph} / c_{ph0}$  от приведённой температуры  $T / T_c$  при различных объёмных концентрациях газовой фазы. Номера кривых 1–4 соответствуют значениям  $\alpha = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  (схематично)

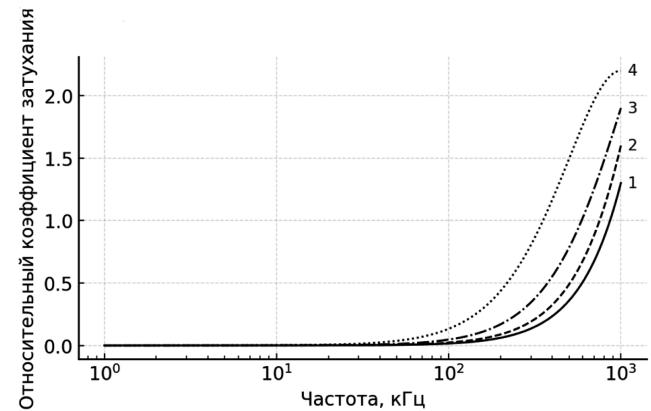


Рис. 2. Частотная зависимость коэффициента затухания при различных приведённых температурах  $\tau$ . Номера кривых 1–4 соответствуют значениям  $\tau = 0.10, 0.05, 0.02, 0.01$  ( $T / T_c = 0.90, 0.95, 0.98, 0.99$ ) (схематично)

Результаты согласуются с экспериментами [7] и подтверждают доминирующее влияние объемной вязкости  $\zeta$  в критической области. Полученное дисперсионное соотношение обобщает классические модели и может использоваться для акустической диагностики термодинамического состояния двухфазных систем.

В настоящей работе рассмотрена монодисперсная газовая фаза при малой объемной концентрации ( $\alpha \ll 1$ ) и пренебрежении скольжением фаз. В дальнейшем предполагается расширение модели на случай полидисперсного распределения пузырьков, учет нелинейных эффектов и переход к трехмерной постановке задачи.

### Заключение

Разработана математическая модель распространения акустических волн в двухфазной системе с учётом

степенных (критических) зависимостей термодинамических и транспортных параметров:  $\kappa_T \sim \tau^{-1.24}$ ,  $c_p \sim \tau^{-0.11}$ ,  $\lambda \sim \tau^{-0.63}$ ,  $\zeta \sim \tau^{-0.67}$ , характерных для простых жидкостей, относящихся к трехмерному универсальному классу Изинга. Получено обобщённое дисперсионное соотношение Кирхгофа–Стокса с учётом объемной вязкости. Установлено, что при приближении к критической точке ( $\tau \rightarrow 0$ ) скорость звука снижается примерно до 60 % от исходного значения, коэффициент затухания возрастает в 8–12 раз, а частота максимального затухания  $f_{\max}$  смещается с  $\approx 500$  кГц до  $\approx 80$  кГц. Разработан численный алгоритм второго порядка точности  $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$  с адаптивным шагом и поглощающими граничными условиями Хигдона первого порядка. Предложенная модель может быть использована для акустической диагностики околокритических двухфазных систем и анализа аномального поведения транспортных коэффициентов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Г.С., Алмара Л.М., Прасад В. Термодинамический анализ аномальной области, критической точки и перехода от субкритического к сверхкритическому состоянию // Physics of Fluids. — 2024. — Т. 36. — № 2. DOI: 10.1063/5.0179651.
2. Лассо Д., Запполи Б., Марр С., Гаррабос И. Теплоперенос в пористой среде, насыщенной околокритической жидкостью: эффект поршня и вязкое замедление // Physical Review Fluids. — 2024. — Т. 9. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.9.124402.
3. Ли Ю., Чжоу З., Ми Ц. Связь между физическими параметрами сверхкритических жидкостей и скоростью звука вблизи критической точки // Physics of Fluids. — 2022. — Т. 34. — № 11. DOI: 10.1063/5.0122905.
4. Губайдуллин Д.А., Фёдоров Ю.В. Акустика вязкоупругой жидкости с газовыми пузырьками, покрытыми вязкоупругой оболочкой // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2022. — Т. 95. — С. 788–796. DOI: 10.1007/s10891-022-02537-4.
5. Фёдоров Ю.В., Гафиятов Р.Н., Губайдуллина Д.Д. Волновая динамика газового пузырька с гиперэластичной оболочкой в вязкоупругой жидкости // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2024. — Т. 97. — С. 1277–1284. DOI: 10.1007/s10891-024-03001-1.
6. Фёдоров Ю.В., Гафиятов Р.Н. Отражение акустической волны от границы между жидкостью и смесью жидкости с твёрдыми частицами и газовыми пузырьками // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Т. 46. — С. 2044–2052. DOI: 10.1134/S1995080225606861.
7. Соджахруд А.Дж., Ли Ц., Хаги Х., Каршафян Р., Портер Т.М., Колиос М.К. Исследование зависимости скорости звука и затухания в пузырьковых средах от давления // Ultrasonics Sonochemistry. — 2023. — Т. 95. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2023.106319.
8. Гималтдинов И.К., Столповский М.В., Кочанова Е.Ю. Акустическое зондирование подводных выбросов // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2024. — Т. 97. — С. 353–360. DOI: 10.1007/s10891-024-02901-6.
9. Ван Ю., Гао Я., Ван Т. и др. Теоретические и экспериментальные исследования отражения звука в пузырьковых жидкостях с малой концентрацией пузырьков // Applied Sciences. — 2022. — Т. 12. — № 23. DOI: 10.3390/app122312264.
10. Байсенс Д. Обзор транспортных явлений вблизи критической точки жидкостей // Frontiers in Space Technologies. — 2022. — Т. 3. DOI: 10.3389/frspt.2022.876642.

© Палванов Мурод Равшанович (m.palvanov@stankin.ru); Уварова Людмила Александровна (uvar11@yandex.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»