РАСЧЁТ СТОИМОСТНОЙ МЕРЫ РИСКА В СТАТИСТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ R

CALCULATION VALUE AT RISK OF THE STATISTICAL PACKAGE R

L. Zubkova
S. Dyachkov

Annotation

The concept of an investment risk is quite blurred, while, in a practice, there is necessary to have quantitative value of it. Because of it, it is important to know how to calculate this value and how put it to use in a routine. In the article reviewed model Value-at-Risk or VaR. There is discussed different methods of VaR's calculations: the historical method, the variance method, the Monte Carlo method. There is examined appliance of this model for a portfolio – the portfolio VaR. The article contains the source code in the programming language R for calculating VaR by different methods and examples of its implementation.

Keywords: Value-at-Risk, portfolio investments, normal distribution, Monte-Carlo simulation, R.

Зубкова Лариса Дмитриевна
К.э.н., доцент,
Тюменский государственный университет
Дьячков Сергей Михайлович
Тюменский государственный университет

Аннотация

Понятия риск при инвестировании довольно размыто, в то время как на практике возникает необходимость в количественные оценки данной меры. В связи с этим важно знать, как это сделать и как внедрить это в повседневную практику. В статье рассматривается модель стоимостной меры риска Value-at-Risk или VaR. Приведены основные разновидности расчёта данного показателя: исторический метод, параметрический метод, метод Монте-Карло. Рассмотрен механизм применения данной модели при портфельных инвестициях – портфельный VaR. В статье приведен исходный код скриптов на языке программирования R для расчета данных разновидностей VaR и результаты расчетов на модельной задаче.

Ключевые слова:

Стоимостная мера риска, портфельные инвестиции, нормальное распределение, метод Монте-Карло, статистический пакет R.

ВВЕДЕНИЕ

При ведении инвестиционной деятельности, наиболее важным аспектом для инвестора является выбор стратегии и управлению финансовыми активами, а это невозможно без понимания величины возможных убытков. Существует множество концепций и моделей, позволяющих произвести их оценку и/или получить значения вероятности, с которой они могут произойти. Рассмотрим наиболее распространённую модель технического анализа, дополняющую волатильность, модель для оценки риска инвестиций в финансовый актив в измерениях риск, доходность – Value-at-Risk – и способы её расчета в статистическом пакете R.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Главным недостатком волатильности является отсутствие информации о направлении изменения цены актива, то есть волатильность без знаковая величина, по которой невозможно рассчитать вероятность и силу "плохих" изменений для инвестора, а можно лишь оценить общую амплитуду изменений цены.

Value-at-Risk или *VaR* – это стоимостная мера риска, которая показывает, какую максимальную сумму денег может потерять портфель инвестора в течении определенного периода времени с заданной доверительной вероятностью.

Основными параметрами VaR выступают следующие величины:

- Величина временного окна (Time Frame);
- Уровень доверительной вероятности (Confidence Level);
- Объем возможных потерь (Loss Amount).

Анализ рыночных рисков с помощью VaR основывается на распределении прибылей и убытков, которые может принести портфель или финансовый актив в течении определенного времени. На основании полученного распределения производится принятия инвестиционного решения с учётом пожелания инвестора в терминах риск/доходность.

Соответственно для расчёта показателя VaR по историческим данным о цене активов, входящих в портфель, необходимо использовать функцию доходности [1]:

$$r_{t,T}=\frac{P_t+D_{t,T}-P_{t-T}}{P_{t-T}} \qquad (1)$$

где

P_t – рыночная цена актива в момент времени ;

P_{t-T} – рыночная цена актива в момент времени (на дней раньше);

$D_{t,T}$ – промежуточные выплаты по активу, приходящиеся на период дней от до (например, дивиденды или купонные платежи).

Так как показатель доходности является без размерным, модель VaR позволяет производить численную оптимизацию стоимостной меры риска портфеля, посредствам определения оптимального количества единиц активов в портфеле, для удовлетворения требований инвестора.

Тем самым можно утверждать, что, обладая численной оценкой возможных потерь, инвестор может просчитывать свои инвестиционные решения.

По методам расчета различают следующие типы VaR:

- Исторический или в англ. литературе historical method;
- Параметрический (аналитический) или в англ. литературе the variance–covariance method;
- Расчёт VaR методом Монте–Карло или в англ. литературе Monte Carlo simulation.

Рассмотрим каждый из них подробнее.

Исторический VaR.

Рассмотрим пример построения исторического не параметрического дневного VaR для Евро по данным ЦБ РФ. Для построения модели сначала необходимо рассчитать доходность актива по формуле 1. Результаты расчетов на модельной задаче представлены в **табл. 1**.

По данным таблицы 1 построим гистограмму дневных доходностей Евро (**Рис. 1**). Как видно на рисунке форма распределения доходностей напоминает нормальное распределение, на что мы ещё раз обратим внимание при выборе закона распределения для построение параметрической модели VaR.

Далее необходимо найти квантиль, который соответствует заданному уровню доверительной вероятности. В качестве примера возьмем уровень равный 95% рекомендуемый методологией RiskMetrics разработанной J.P. Morgan [2].

По **рис.1**, можно утверждать, что с вероятностью 95% дневная доходность Евро не опустится ниже –0,01528189 или –1,5% или другими словами с вероятностью 95% дневной убыток от инвестирования в Евро не превысит 1,5% от размера позиции. Тем самым зная размер открытой позиции по Евро мы можем рассчитать размер убытка. Например, при открытой позиции в 1000 Евро, купленных 11.08.2015 г. по цене 70,7540 руб. за 1 Евро VaR составит:

$$\begin{aligned}&VaR_{hist}\ (0{,}95)=\\&=0{,}01528189*(1000*70{,}7540)=\\&=1081{,}2548\end{aligned} \qquad (2)$$

Таблица 1.

Расчет доходности Евро по данным ЦБ РФ за период с 01.01.1992 по 11.08.2015.

Дата	Евро ЦБ	Изменение за торговый день	Доходность
01.01.1999	24,0900	нет данных	нет данных
06.01.1999	24,4000	0,3100	0,0128684
07.01.1999	25,7300	1,3300	0,0545082
…	…	…	…
07.08.2015	69,6314	1,4879	0,0218348
08.08.2015	69,8089	0,1775	0,0025491
11.08.2015	70,7540	0,9451	0,0135384

Или другими словами, по данным формулы 2, с вероятностью 95% дневной убыток от инвестирования в 1000 Евро не превысить 1081 руб. 25 копеек.

Для расчета данного показателя в статистическом пакете R желательно сначала скопировать исходный массив доходностей в новую переменную, чтобы избежать внесения изменения в исходные данные, а затем отсортировать данный список:

```
dp<-DataCurrencies$EURDailyRateOfReturn
L_sorted<- sort(dp)
```

Потом необходимо найти значения квантиля и умножить его на размер актива в базовой валюте:

```
VaR_hist<- quantile(L_sorted, 1-ConfLevel)
VaR_hist<- Var_hist * AssetCost
```

Данный способ расчета является самым просты и не требует каких-либо знаний в области теории вероятности.

Параметрическая модель VaR.

В отличии от исторического VaR, параметрический VaR предусматривает что распределение приростов и убытков известно и задано в параметрическом виде. В таком случае VaR предусматривает собой квантиль уже не эмпирического, а гипотетического распределения. Однако сами параметры гипотетического распределения рассчитывают по фактическим данным.

В качестве закона распределения обычно берут нормальный закон распределения доходностей, так как ему чаще всего удовлетворяет распределение доходностей и параметры для его построения (среднее значение и средне квадратичное отклонение) можно легко получить по историческим данным. Однако можно использовать и другие законы распределения случайных величин предварительно проверив гипотезу об удовлетворении исследуемой величины ему. Для нормального распределения на практике, чаще всего, применяют уровни доверительной вероятности – 95,44%, либо – 99,72%, в зависимости от выдвигаемых требований [3].

Для расчета средней величины доходности (μ или EURmean) и её среднеквадратичного отклонения (σ или EURsd) в R используются следующие команды:

```
EURmean <-
mean(DataCurrencies$EURDailyRateOfReturn, na.rm =
= TRUE)

EURsd <-
sd(DataCurrencies$EURDailyRateOfReturn, na.rm =
= TRUE)
```

Для модельной задачи, описанной в первом примере, получаем μ=0,000294444 и σ=0,008187495.

График функции плотности нормального распределения с заданными параметрами изображен на **Рис. 2**.

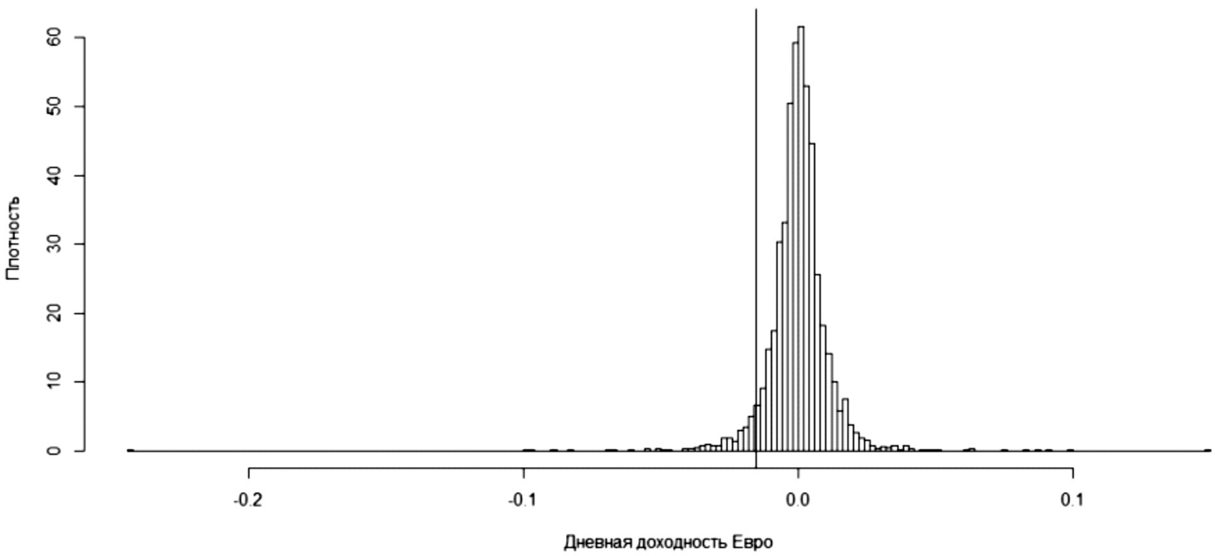

Рисунок 1. Гистограмма дневной доходности Евро по данным ЦБ РФ за период с 01.01.1992 по 11.08.2015 и значение 5% квантиля.

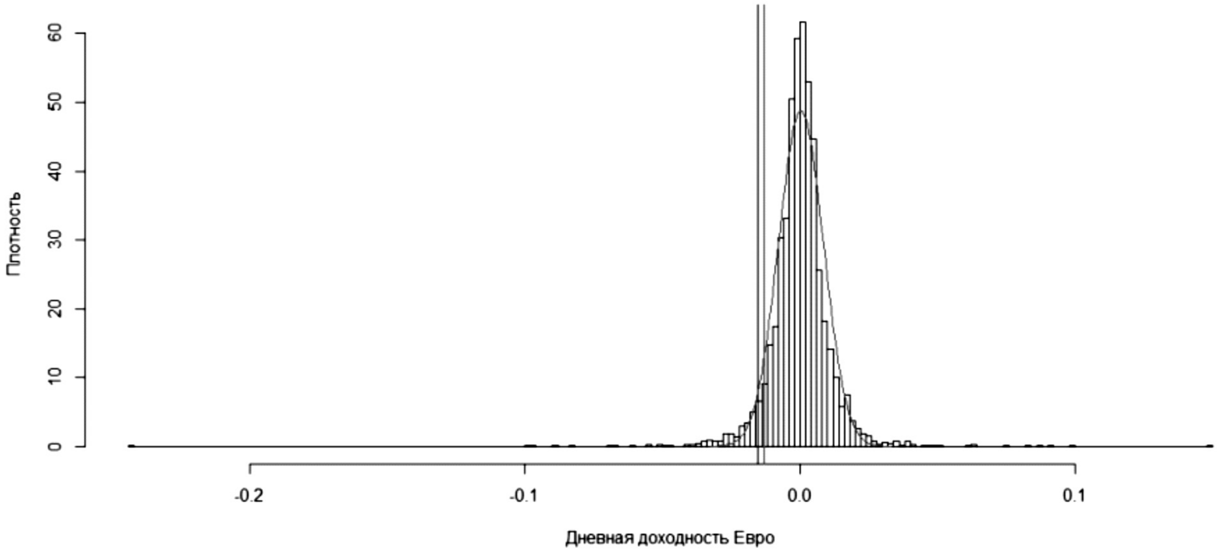

Рисунок 2. Функция плотности нормального распределения построенная по доходности Евро по данным ЦБ РФ за период с 01.01.1992 по 11.08.2015,

После чего вычислим квантиль нормального распределения:

VaR_param<- qnorm(1-ConfLevel, mean=EURmean, sd=EURsd)

В результате расчета 5% квантиля (ConfLevel = 0,95) получаем значение равное –0,01317279, что означает что с вероятностью 95% убыток по Евро не составит более 1,3173%. Далее можно вычислить само значение VaR:

VaR_hist<- Var_hist * AssetCost

Что при размере актива в 70 754 руб. составит:

$$\begin{aligned} &VaR_{param}\ (0{,}95)= \\ &=0{,}01317279*(1000*70{,}7540)= \\ &=932{,}0276 \end{aligned} \quad (3)$$

Или другими словами, по данным формулы 3, с вероятностью 95% дневной убыток от инвестирования в 1000 Евро не превысит 932 руб. 03 копеек, без учета комиссионных издержек.

Однако стоит заметить, что как параметрический VaR, так и исторический VaR основываются на истории и не моделируют возможные изменения в будущем. Для решения данной задачи был разработан метод расчёта VaR в основе которого лежит получения получении большого числа реализаций стохастического (случайного) процесса изменения доходности, то есть моделирования возможных исходов изменения доходности в будущем. Данный численный метод носит название метод Монте-Карло.

Расчёт VaR методом Монте-Карло.

Чтобы рассчитать VaR методом Монте-Карло, необходимо знать не только закон распределения моделируемой величины и параметры данного распределения, но и количество итераций для моделирования случайной величины. При этом параметры распределения, так же, как и для параметрического VaR, могут быть рассчитаны по историческим данным, а количество итераций подбирается эмпирическим путем исходя из критерия достаточности (репрезентативности) случайных событий.

В качестве актива возьмем Евро из предыдущих задач с средней величиной доходности μ=0,000294444 и среднеквадратичным отклонением σ=0,008187495. Количество итераций возьмем равное 1 тыс. Для расчета VaR методом Монте-Карло необходимо смоделировать случайную величину с нормальным законом распределения по заданным параметрами:

```
RandomArr = rnorm(1000, mean = EURmean,
sd = EURsd)
L_sorted<- sort(RandomArr)
```

После чего найти 5% квантиль данной величины (ConfLevel = 0,95):

```
VaR_MC<- quantile(L_sorted, 1-ConfLevel)
```

Результаты моделирование представлены на Рис. 3. 5% квантиль смоделированной случайной величины равен -0,01332504, что означает что с вероятностью 95% убыток по Евро не составит более 1,3325%. Так же рассчитаем само значение VaR по данным предыдущего примера:

VaR_MC<- VaR_MC * AssetCost

Что при размере актива в 70 754 руб. составит:

$$\begin{aligned}&VaR_{MC}\ (0{,}95)=\\&=0{,}01332504*(1000*70{,}7540)\\&=942{,}7999\end{aligned} \qquad (4)$$

По формуле 4 получаем, что с вероятностью 95% дневной убыток от инвестирования в 1000 Евро не превысит 842 руб. 79 копеек, без учета комиссионных издержек.

По данным Рис. 3 можно смело утверждать, что помимо того, что метод Монте-Карло может не только осуществить прогноз доходности актива, но он ещё и довольно неплохо моделирует "тяжелые" концы распределения, которые игнорируются параметрическим VaRom, что позволяет учитывать события из разряда эффекта "черного лебедя".

Несмотря на то, что в теории зачастую уделяется больше внимание VaR одного актива, не секрет, что на практике инвестор всегда сталкивается с задачей портфельного инвестирования для диверсификации рисков. Рассмотрим портфельный VaR.

Портфельный VaR.

Для оценки стоимости риска при портфельном инвестировании была разработана модификация VaR на основе портфельной теории Марковица [4], учитывающей корреляцию (нормированную ковариацию) между активами, входящими в портфель. Основная суть портфельного VaR заключается в том, что корреляция между доходностями активов позволяет исключить из-под риска часть стоимости портфеля.

Для расчета корреляций необходимо иметь исторические данные по доходностям активов. Общая формула портфельного VaR, записанная в матричном виде, выглядит следующим образом [5]:

$$VaR_{port}=\sqrt{(VaR_{asset}{}^{T}\times Corr_{asset})\times VaR_{asset}} \qquad (5)$$

где

$$VaR_{asset}=\begin{pmatrix}VaR_1\\ \vdots \\ VaR_n\end{pmatrix}$$

– вектор активов портфеля
(VaR_i – VaR i-ого актива портфеля);

$$Corr_{asset}=\begin{pmatrix}Corr_{11} & \cdots & Corr_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ Corr_{n1} & \cdots & Corr_{nn}\end{pmatrix}$$

– матрица корреляций доходностей активов, входящих

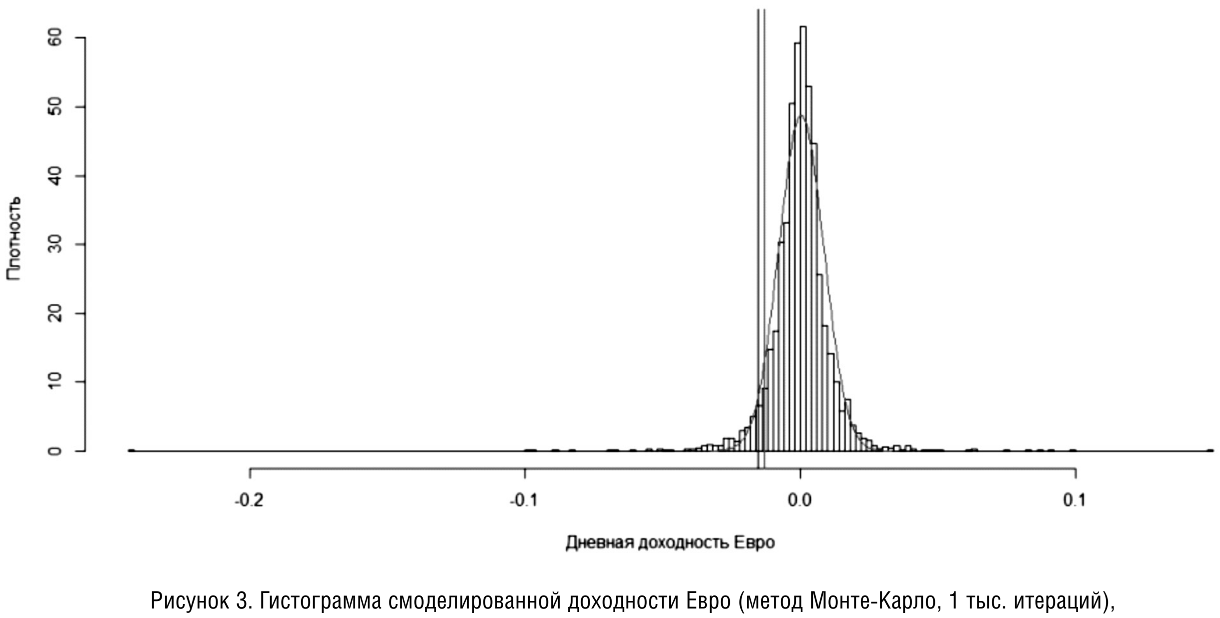

Рисунок 3. Гистограмма смоделированной доходности Евро (метод Монте-Карло, 1 тыс. итераций), вертикальная прямая - значение 5% квантиля.

в портфель (Cor_{ij} – корреляция между доходностью i-ого и j-ого активов).

Расчет портфельного VaR является трудоемким процессом при $n > 2$.

Рассмотрим решение комплексной задачи расчета портфельного VaR методом Монте-Карло на языке программирования R.

В приведенной ниже примере для удобства работы с массивами использовался пакет MASS.

```
library(MASS);
```

Для начала подготовим вектора средних значений (μ – mu), среднеквадратичного отклонения (σ – theta) и матрицу корреляций

(Corr – alpha) по заданным значениям доходностей активов (ReturnRate).

```
mu<- apply(ReturnRate,2,mean)
teta<- apply(ReturnRate,2,sd)
alpha<- cor(ReturnRate)
```

Далее рассчитаем случайные величины для каждого актива с заданными параметрами нормального распределения (μ – mu и σ – theta).

```
RandomArr.array <- array(0, dim=c(NofItterations, NofAssets), dimnames(c('Itterations by Days', 'Asset')))

for (j in 1:NofAssets)
 {
    RandomArr.array[,j]=rnorm(NofItterations*
    NofDays, mean = mu[j], sd = teta[j])
 }
```

После чего для каждого актива считаем VaR методом Монте-Карло в относительном выражении (в %): сортируем полученные значения по возрастанию (L_sorted) и находим значение квантиля с заданным уровнем доверительной вероятности с левой стороны распределения (1-ConfLevel).

```
AssetsVar.array<- array(0, dim=c(NofAssets), dimnames(c('Asset MC VaR')))
for (j in 1:NofAssets)
 {
 L_sorted<- sort(as.matrix(RandomArr.array[,j]))
 AssetsVar.array[j] = (quantile(L_sorted, 1-ConfLevel))
 }
```

Далее рассчитывая значение VaR в абсолютном выражении для открытых позиций, выраженных в базовой валюте (portfolioCost).

```
VaRByAsset<-
as.matrix(AssetsVar.array)*t(portfolioCost)
```

Для сравнения рассчитаем VaR портфеля как сумму VaR всех активов (VaRWithoutCorr), и согласно портфельной теории Марковица (VaRWithCorr), с учётом корреляций между доходностями (alpha). Причем всегда выполняется неравенство .

```
VaRWithoutCorr<- (t(as.matrix(AssetsVar.array)) %*%
t(portfolioCost))

VaRWithCorr<-
sqrt((t(VaRByAsset)%*%alpha)%*%(VaRByAsset))
```

Т

ак же для расчета портфельного VaR методом Монте-Карло существует другое, более лаконичное решение, основанное на многомерном нормальном распределении между доходностями активов и эквивалентное первому (VaRWithCorr).

Для его реализации необходимо найти матрицу ковариаций (cov) и вектор средних значений (μ – mu).

```
sigma<- cov(ReturnRate)
```

После чего необходимо построить многомерное нормальное распределение с заданными параметрами (*cov* и μ – mu) и рассчитать убыток портфеля (PortfolioProfit).

```
RandomArrMultVarNormDist <-
mvrnorm(NofItterations, mu, sigma)

PortfolioProfit <- RandomArrMultVarNormDist %*%
t(as.matrix(portfolioCost))
```

По рассчитанным данным находится значение квантиля (VARMultVarNormDist) с заданным уровнем доверительной вероятности с левой стороны распределения (1-ConfLevel).

```
VARMultVarNormDist <- (quantile(PortfolioProfit,
p=1-ConfLevel))
```

Так же стоит отметить что существуют уже готовые свободно распространяемые пакеты для расчета VaR в R, например,

PerformanceAnalytics:
http://www.braverock.com/brian/R/Performance Analytics/html/VaR.html.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На сегодняшний день большинство рутинных вычислительных операций выполняется компьютером, однако далеко не всегда человек использует все возможные достижения для сокращения времени их выполнения и расширения своих возможностей.

Использование статистического пакета R в сфере финансов может позволить сократить время в разработке методик численных оценок и расширить их возможности, что было продемонстрированно на примере расчета показателя стоимостной меры риска различными методами.

В целом использование R можно оценить, как легкомасштабируемое решение финансовых задач, то есть отсутствие необходимости изменения скрипта при изменении входных данных.

По использованию модели Value–at–Risk стоит оговориться, что, как и во многих теоретических эконометрических моделях, в Value–at–Risk не учитываются комиссионные затраты, связанные с покупкой и продажей актива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин А.Н. Управление портфелем ценных бумаг, М.: Научно–техническое объединение имени академика С.И. Вавилова. 2007. – 404 с.
2. Ивлиев С.В., Ефремова Т.А., Лапшина В.А., Степанов О.А., Манаев В.Н. Управление рыночным риском: методология, практика, рекомендации. Практическое пособие. М.: Издательский дом "Регламент–Медиа". 2013. – 232 С.
3. Бухтин М.А. Риск–менеджмент в кредитной организации: методология, практика, регламентирование. Методическое пособие. – М.: Издательский дом "Регламент", 2008: книга 1. Методика и практика работы подразделений риск–менеджмента. 2008. – 448 с.
4. Шарп, У. Ф. Инвестиции: учебник. / Шарп У. Ф., Александр Г. Д., Бэйли Дж. В.; пер. с англ.: А. Н. Буренин. – М.: Инфра–М, 2009. – 1028 с.
5. Holton, Glyn A. Value–at–Risk: Theory and Practice, second edition, 2014, e–book [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://value–at–risk.net (дата обращения: 11.11.2015).