DOI 10.37882/2223-2966.2023.06.10

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЧЕЛОВЕКА-ОПЕРАТОРА В КОНТУРЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ «ЧЕЛОВЕК-МАШИНА»

Горячкин Борис Сергеевич
кандидат технических наук, доцент,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
bsgor@mail.ru
Петренко Александр Сергеевич
Магистрант,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
ipax.fouls00@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается проблема моделирования взаимодействия человека с компьютером. Моделирование взаимодействия человека и компьютера является сложной и трудной задачей. Одной из ключевых проблем является разработка модели пользователя, которая точно отражает его потребности, способности и поведение. Более того, потребности и способности пользователя могут меняться со временем, что делает необходимым постоянное обновление модели пользователя для обеспечения её точности и полезности.
Результаты. Была представлена модель оценки качества, вводимой человеком-оператором информации в системе «человек-машина» на основе марковских цепей. Благодаря модели удалось установить взаимосвязь между количеством шагов процесса в системе «человек-машина» и вероятностью ошибки оператора при вводе символа и рассчитать оптимальные значения данных параметров.
Применение данной модели для оценки качества ввода информации и расширение модели на задачи, выполняемые технической частью системы, позволяют лучше учитывать реальные условия работы человека-оператора в системе «человек-машина».

Ключевые слова. Человек-оператор, моделирование деятельности оператора, цепь Маркова, вероятность состояния, ввод команды, система «человек-машина», информационная система.

APPLICATION OF MARKOV CHAINS THEORY TO MODELING OF HUMAN-OPERATOR ACTIVITY IN CONTROL LOOP OF HUMAN-MACHINE SYSTEM

B. Goryachkin
A. Petrenko

Summary: The article deals with the problem of modeling human-computer interaction. Modeling human-computer interaction is a complex and difficult task. One of the key problems is to develop a user model that accurately reflects their needs, abilities, and behavior. Moreover, user needs and abilities may change over time, which makes it necessary to constantly update the user model to ensure its accuracy and usefulness.
The model of an estimation of quality of the information entered by the person-operator into human-machine system on the basis of Markov chains was presented. Due to the model it was possible to establish interrelation between the number of steps of the process in human-machine system and the probability of operator's error during the input of the symbol, and to calculate optimum values of these parameters.
Application of the given model for an estimation of quality of information input and model expansion on the tasks executed by technical part of system, allow to consider better real working conditions of human-machine system.

Keywords. Human operator, modeling of operator activity, Markov chain, probability of state, command input, human-machine system, information system.

Введение

Как в повседневной жизни, так и в работе мы имеем дело с разнообразными информационными системами (ИС). Системы информационных услуг или информационные сервисы — это те, в которых пользователь управляет компьютерной системой, а с помощью нее управляет соответствующим процессом или сервисом. В их число входят: распространенные системы обслуживания клиентов, предлагаемые в Интернете, системы резервирования мест, системы поиска информации (от расписаний до библиографической и научной информации) и т.д. Встречаются и так называемые «открытые системы», например, в случае мобильной связи и банков. Банкомат представляет собой типичный пример взаимодействия неквалифицированного оператора и специализированного компьютера. В случае такой системы пользовательский интерфейс должен обеспечивать быстрый доступ к требуемой функции.

Иную группу подобных систем составляют специализированные системы, которые используются для управления действиями (например, системы управления воздушным движением, системы управления объектами, системы аварийно-спасательных операций, системы военного назначения и т.д.). Характерными чертами систем, которые используются для управления действиями, являются (среди прочего): участие человека в системных задачах, неполная информация об управляемом процессе, высокая динамика изменения состояния системы, ограниченность времени и высокие требования к корректности выполнения задачи со стороны системы. Использование исполнительных элементов системы определяется информационно-решающей подсистемой [1]. Задачи информационной системы сводятся к обработке собранных данных и представлению их человеку-оператору (ЧО). Задачи оператора, выполняемые за счет использования сложного интерфейса, заключаются в следующем: наблюдение за отображаемой информацией, получение необходимой информации, ее осмысление, ввод дополнительной информации, оценка ситуации, принятие решений и ввод данных для реализации принятых решений в компьютерную систему [2]. Таким образом, операции, выполняемые оператором, достаточно часто сводятся к вводу команд в компьютер.

Специфика деятельности ЧО в контуре управления системы «человек-машина»

На этапе проектирования системы человек-машина (СЧМ) возникает проблема оценки качества системы, в частности, проблема оценки качества выполнения задач, осуществляемых человеком-оператором в процессе проектирования взаимодействия оператора с компьютером [3, 4]. На основе такой оценки проектировщик может изменить проект таким образом, чтобы СЧМ выполняла задачи с предполагаемым качеством. Для проектировщика СЧМ важны качественные характеристики деятельности, осуществляемой оператором. На основе знания таких характеристик проектировщик системы может в целом оценить: качество выполняемых системой задач, определить полезность изменений в способах ввода информации, чувствительность к изменениям алгоритмов выполнения задач оператором и многое другое [5, 6].

Чтобы помочь проектировщику СЧМ в решении упомянутых выше проблем, необходимы некоторые модели, применимые по отношению к конкретным системам взаимодействия оператора и машины. На основе этих моделей можно будет оценить качество действий оператора, например, вводящего информацию через спроектированный интерфейс.

Оценка качества выполнения задачи оператором затруднена из-за следующих факторов [7]:

1) случайный характер работы оператора, точнее, случайное время выполнения элементарных операций;

2) случайный выбор частичных задач, выполнение которых приводит к завершению всей задачи;

3) изменяемость во времени характеристик качества частичного выполнения задачи оператором;

4) помехи в работе оператора, т.е. стресс, вызванный различными факторами (в т.ч. ограниченным временем).

В данной работе действие оператора по отношению к СЧМ (исследование этих действий) ограничивается вводом информации (т.е. вводом команды) в систему. Не учитываются содержательные проблемы принятия решений, рассматривается техническая сторона деятельности оператора. В основу анализа положено понятие элементарного действия или операции, т.е. базовой единицы действия оператора. Предполагается, что оператор выполняет элементарные действия, входящие в состав задачи ввода информации. Элементарное действие оператора состоит, например, в нажатии клавиши или щелчке мышью на объект. Задачи, выполняемые оператором, представлены в виде последовательности элементарных действий.

Применение математических методов и средств для создания модели человека-оператора

В данном исследовании предложено взять за основу математического аппарата марковские цепи.

Протекание какого-либо процесса и прогнозирование его будущего состояния в любой момент времени на основании известного настоящего описывается марковскими процессами, где появление случайных событий представлено в виде вероятностей переходов из одного состояния в другое [8]. При этом предполагается, что переход в каждое следующее состояние зависит только от предыдущего, образуя последовательность (цепь). Это полностью согласуется с определением свойств операторской деятельности в СЧМ: итерационность и предопределение предыдущим действием ЧО его последующих действий.

В теории марковских цепей основными вероятностными характеристиками являются не математическое ожидание и корреляционная функция, а вектор начальных состояний и матрица перехода [9].

Переход осуществляется под влиянием воздействующих негативных факторов и характеризуется вероятностью перехода p_{ij}. Каждая величина p_{ij} является переменной и показывает вероятность попадания в j-е состояние из i-го [10]. Для рассматриваемой СЧМ допустим, что множество моментов времени является дискретным. Для простоты записи также примем, что события $X(t) = a_i$ могут быть представлены как

$$X(t) = i,\ i \in M = \{1, \ldots, m\} \# (1)$$

где M — число состояний системы в интервале от 1 до m.

Теперь опишем вероятности переходов для достижения того или иного состояния. Вектор вероятностей состояний:

$$P(k) = \left[P_1(k), P_2(k), \ldots, P_i(k), \ldots, P_m(k)\right], \#(2)$$

где $P_i(k) = P\{X(k) = i\}$ вероятность того, что процесс перейдет в состояние i через k шагов, $i \in M$.

Вектор вероятностей имеет предел:

$$P^\infty = \lim_{k\to\infty} P(k). \#(3)$$

Уравнение Чепмена-Колмогорова:

$$P(k+1) = P(k)\Pi, \#(4)$$

где $\Pi = \left[p_{ij}\right], i, j = 1, \ldots, m$ — стохастическая матрица; $p_{ij} = P\{X(k+1) = j \mid X(k) = i\}$ — вероятность того, что процесс окажется в состоянии j через $k+1$ шагов при условии, что процесс находился в состоянии i спустя k шагов.

Предположим, что стохастическая матрица регулярна. Это необходимое и достаточное условие существования предела:

$$\Pi^\infty = \lim_{k\to\infty} \Pi^k \#(5)$$

Определим z-преобразование (преобразование Лорана) функции Π^k следующим образом:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi^k z^{-k} \#(6)$$

$$P(z) = z(zI - \Pi)^{-1} \#(7)$$

Свойство z-преобразования:

$$\Pi^\infty = \lim_{k\to\infty} \Pi^k = \lim_{z\to 1}(z-1)P(z) = \\ = \lim_{z\to 1} z(z-1)(zI - \Pi)^{-1}. \#(8)$$

Поскольку собственному значению стохастической матрицы Π соответствуют только линейные элементарные делители, возможно следующее преобразование матрицы $(zI - \Pi)^{-1}$:

$$(zI - \Pi)^{-1} = \frac{1}{z-1}C + T(z)\#(9)$$

где матрица C независима от z и матрица T удовлетворяет условию:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)T(z) = 0 \#(10)$$

Учитывая, что матрица Π регулярна, имеем:

$$\Pi^\infty = \lim_{k\to\infty} \Pi^k = C \#(11)$$

Раз матрица Π регулярна, то вектор

$$P^\infty = \lim_{k\to\infty} P(k) = \lim_{k\to\infty} P(0)\Pi^k \#(12)$$

не зависит от исходной величины $P(0)$. Вектор $P(k)$ определяется аналитически с использованием дискретного преобразования Лапласа. Как следствие, определяется вектор P^∞.

Используя z-преобразование относительно уравнения Чепмена-Колмогорова, мы имеем $zP(z) - zP(0) = P(z)\Pi$, где $P(z)$ — z-преобразование функции $P(k)$. Тогда $P(z)$ может быть определено с помощью уравнения

$$P(z) = zP(0)(zI - \Pi)^{-1} \#(13)$$

где I — единичная матрица.

Модель ЧО в системе «человек-машина»

При функционировании компьютерной системы ЧО взаимодействует с компьютером при выполнении задач. Оператор получает необходимую информацию из системы и вводит в нее дополнительную информацию. И приемный, и входящий процессы выполняются вводом соответствующей команды в систему (рис. 1).

ИМЯ Пар$_1$ Пар$_2$ … Пар$_i$ … Пар$_n$ ПРИНЯТИЕ

Рис. 1. Типовая форма команды
(где: ИМЯ — идентификатор вида команды, Пар$_i$ — i-й параметр команды, ПРИНЯТИЕ — окончание ввода команды)

Упрощенным примером команды может быть команда без параметров, состоящая из одного знака, который одновременно является именем команды и подтверждением, и вводится нажатием клавиши оператором.

Алгоритм ввода оператором одного знака показан на рис. 2.

На рис. 3 приведен соответствующий граф переходов.

Переход между состояниями следует интерпретировать как процесс ввода или вывода знака.

Состояния процесса ввода команды можно описать следующим образом:

a_1 — ввод знака;

a_2 — удаление знака в ситуации, когда знак введен правильно, а оператор принял неверное решение, состояние можно назвать «состоянием ложной тревоги»;

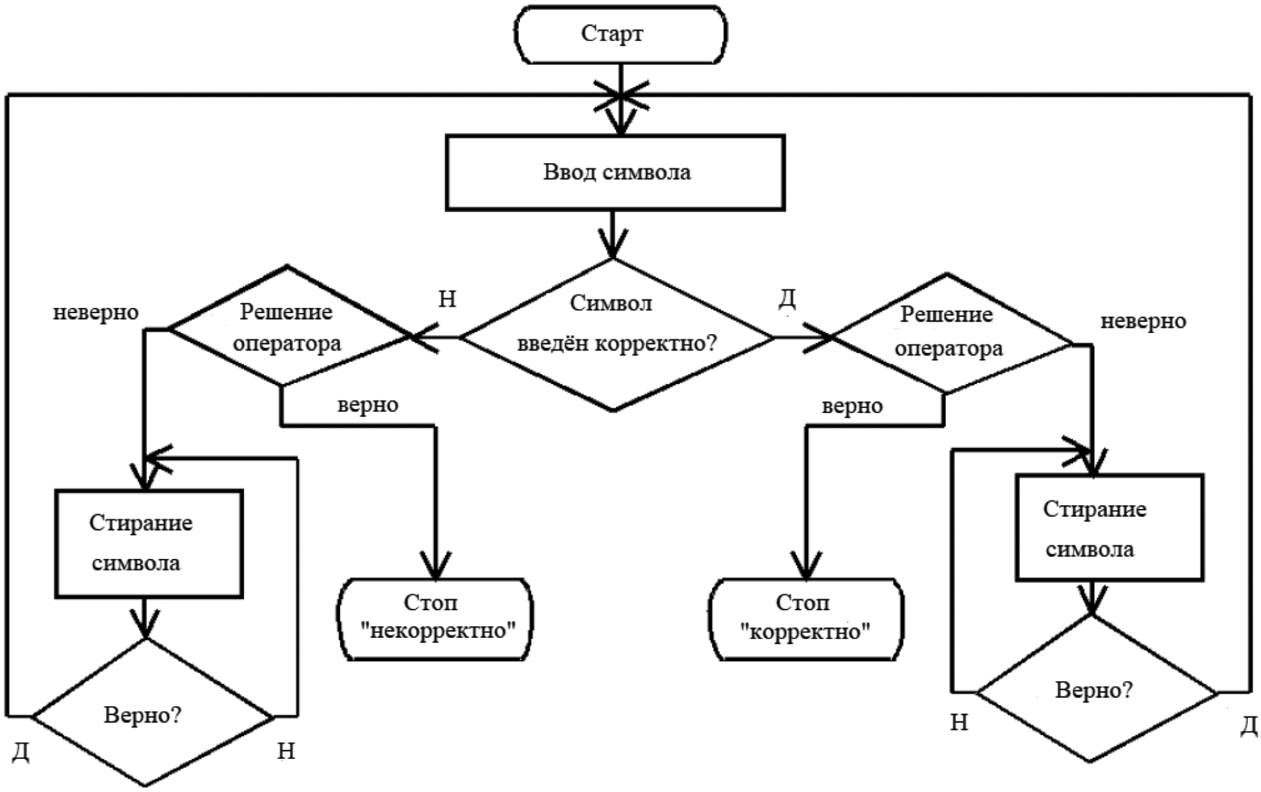

Рис. 2. Схема работы оператор

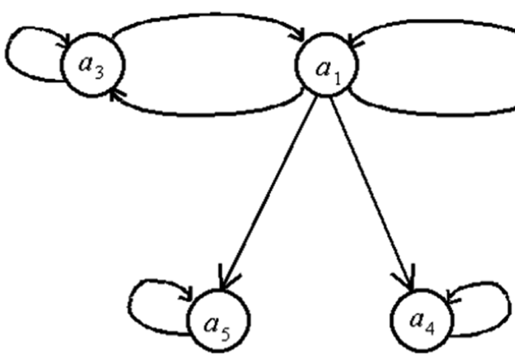

Рис. 3. Граф процесса ввода одного знака

a_3 — удаление знака в ситуации, когда знак был введен неверно и оператор принял правильное решение, состояние можно назвать «правильным состоянием тревоги»;

a_4 — окончание ситуации, когда знак введен правильно и оператор принял правильное решение, состояние можно назвать «состояние правильного ввода»;

a_5 — окончание ситуации, когда знак был введен неверно и оператор принял неверное решение, состояние можно назвать «ложным спокойным состоянием».

Принимая во внимание характеристики надежности активности ЧО, можно определить такую качественную характеристику процесса ввода команд, как вероятность $P_4(k)$ — вероятность того, что процесс ввода команды достиг состояния «введено правильно» после k шагов.

Установим следующие параметры ЧО:

p — вероятность того, что оператор неправильно введёт символ (ошибка)

p_d — вероятность того, что решение оператора неверно

p_c — вероятность того, что оператор неправильно удалит символ

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \#(14)$$

где

$$p_{12} = (1-p)p_d,\ p_{13} = p(1-p_d),\ p_{14} = (1-p)(1-p_d),$$
$$p_{15} = pp_d,\ p_{21} = 1-p_c,\ p_{22} = p_c,\ p_{31} = 1-p_c,\ p_{33} = p_c$$

Начальный момент характеризуется вектором $P(0) = [1, 0, 0, 0, 0]$.

Используя z-преобразование согласно уравнению (13), имеем

$$\mathrm{P}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z(z-p_c)}{\gamma}, \dfrac{zp_{12}}{\gamma}, \dfrac{zp_{13}}{\gamma}, \\ \dfrac{zp_{14}(z-p_c)}{(z-1)\gamma}, \dfrac{zp_{15}(z-p_c)}{(z-1)\gamma} \end{bmatrix}, \#(15)$$

где $\gamma = z(z-p_c) - (1-p_c)(p_{12} - p_{13})$.

Предельное распределение вероятностей пребывания в тех или иных состояниях для рассматриваемого процесса ввода знака имеет вид:

1) Для состояния a_4 имеем

$$P_4^{\infty} = \lim_{k\to\infty} P_4(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)P_4(z) = \\ = \frac{(1-p)(1-p_d)}{1-p+2pp_d-p_d}, \#(16)$$

2) Для состояния a_5 имеем

$$P_5^{\infty} = \lim_{k\to\infty} P_5(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)P_5(z) = \\ = \frac{pp_d}{1-p+2pp_d-p_d}, \#(17)$$

3) Для состояния a_2 имеем

$$P_2^{\infty} = \lim_{k\to\infty} P_2(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)P_2(z) = 0\ \#(18)$$

Легко рассчитать, что в случае $p = 0$ (т.е., когда оператор не совершает ошибки при вводе знака) или при $p_d = 0$ (т.е., когда решение оператора по удалению/неудалению знака верно), имеем $P_4^{\infty} = 1$ и $P_5^{\infty} = 1$.

Для расчёта $P_4(k)$, $P_5(k)$ и $P_2(k)$ используем обратное z-преобразование для выбранных компонент вектора $P(z)$. Для данного преобразования $P_4(z)$, имеем

$$P_4(z) = D_1(z)\frac{z}{z-z_1} + B_1\frac{z}{z-z_2} + U_1\frac{z}{z-z_3}, \#(19)$$

где:

$$D_1 = \frac{p_{14}(1-p_c)}{(z_2-1)(z_3-1)}, B_1 = \frac{p_{14}(z_2-p_c)}{(z_2-1)(z_2-z_3)},$$

$$U_1 = \frac{p_{14}(p_c-z_3)}{(z_3-1)(z_2-z_3)},$$

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{p_c+\sqrt{p_c^2+4\delta}}{2}, z_3 = \frac{p_c-\sqrt{p_c^2+4\delta}}{2},$$

$$\delta = (1-p_c)(p_{12}+p_{13})$$

p_{12}, p_{13}, p_{14} аналогично (14).

Теперь, используя обратное z-преобразование для $P_4(z)$ получаем

$$P_4(k) = D_1 + B_1z_2^k + U_1z_3^k. \#(20)$$

Аналогичные преобразования для $P_5(z)$:

$$P_5(z) = D_2(z)\frac{z}{z-z_1} + B_2\frac{z}{z-z_2} + U_2\frac{z}{z-z_3}, \#(21)$$

где

$$D_1 = \frac{p_{15}(1-p_c)}{(z_2-1)(z_3-1)}, B_1 = \frac{p_{15}(z_2-p_c)}{(z_2-1)(z_2-z_3)},$$

$$U_1 = \frac{p_{15}(p_c-z_3)}{(z_3-1)(z_2-z_3)}$$

Обратное z-преобразование для $P_5(z)$:

$$P_5(k) = D_2 + B_2z_2^k + U_2z_3^k. \#(22)$$

Преобразуя $P_2(k)$, приходим к

$$P_2(z) = B_3\frac{z}{z-z_2} + U_3\frac{p_{12}}{z_3-z_2}, \#(23)$$

где

$$B_3 = \frac{p_{12}}{z_2-z_3}, U_3 = \frac{p_{12}}{z_3-z_2}$$

Используя обратное z-преобразование на $P_2(z)$, получаем

$$P_2(k) = B_3z_2^k + U_3z_3^k. \#(24)$$

Эффективность применения марковских цепей для моделирования операторской деятельности

Произведём расчёт вероятности достижения корректного состояния оператором спустя определенное количество шагов (для состояний a_4 и a_5) согласно формулам (15)–(23). Диапазон значений для $p_d \in [0, 0.5]$, для $p = p_c \in [0.005, 0.15]$.

Достижение состояния P_4, как следует из формулы (20), будет зависеть от вероятностей, что ЧО ввёл символ некорректно (p) или стёр символ ошибочно (p_c). Чем меньше установлены данные параметры ЧО, тем выше окажется вероятность, что ЧО ввёл символ корректно (вероятность P_4). Также, согласно формуле (20), предполагается, что P_4 зависит обратным образом от вероятности того, что решение ЧО неверно (p_d), и зависит напрямую от количества шагов в процессе СЧМ.

Согласно формуле (22), вероятность $P_5(k)$, что ЧО совершил ошибку при вводе символа или принял неверное решение после его ввода, должна возрастать при увеличении вероятности p_d (решение ЧО неверно).

Подтверждение данных выводов следует из графиков на рис. 4: влияние вероятности ошибочного решения p_d на вероятность достижения состояния правиль-

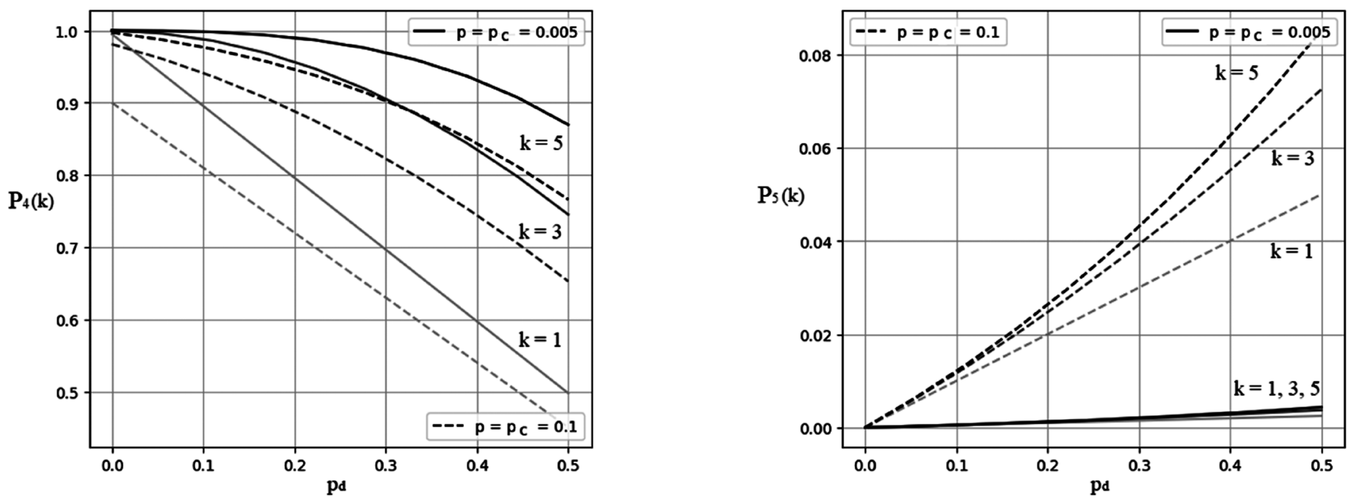

Рис. 4. Вероятность достижения корректного состояния P_4(слева) и P_5 (справа) в зависимости от p_d. Зависимости взяты для случаев $p = p_c = 0.005$ (непрерывная линия) и $p = p_c = 0.1$ (штриховая линия). Количество этапов в процессе СЧМ: $k = 1$ (светло-серый цвет), $k = 3$ (серый цвет), $k = 5$ (тёмно-серый цвет)

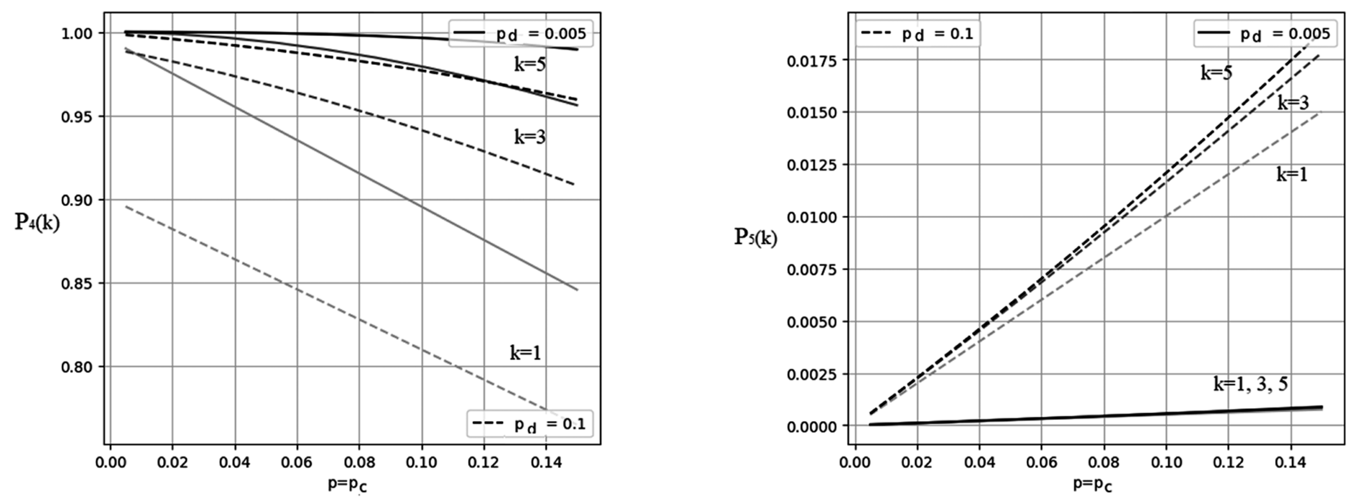

Рис. 5. Вероятность достижения корректного состояния P_4 (слева) и P_5 (справа) при одновременном изменении p, p_c. Зависимости взяты для случаев $p_d = 0.005$ (непрерывная линия) и $p_d = 0.1$ (штриховая линия). Количество этапов в процессе СЧМ: $k = 1$ (светло-серый цвет), $k = 3$ (серый цвет), $k = 5$ (тёмно-серый цвет)

ного ввода знака $P_4(k)$ весьма существенно — при $p_d = 0.5 P_4(k)$ достигает минимального значения. При этом с увеличением числа шагов k в процессе ($k = 1, 3, 5$), различия в $P_4(k)$ уменьшаются.

Большее количество шагов означает большую вероятность того, что символ введен правильно. Это связано с тем, что ЧО имеет возможность удалить введённый символ (независимо от верности введенного знака) и изменить своё исходное решение. В случае $k = 2$ график опущен, так как состояние a_4 не может быть достигнуто за два шага. Для $k = 4$ график расположен между графиками при $k = 3$ и $k = 5$ (опущен для большей ясности).

Аналогично, относительное увеличение $P_5(k)$ при изменении p_d (рис. 4) значительно, но различия, связанные с разным числом шагов, не слишком велики.

При этом при большом изменении p_d увеличение вероятностей p и p_c вызывает значительное увеличение вероятности ложного покоя $P_5(k)$. Достижение состояния a_5 означает, что оператор не обнаружил своей ошибки при вводе информации (а она была).

Теперь рассмотрим ранее уже представленные зависимости в случае фиксированной вероятности p_d и изменяющихся $p = p_c$.

Вероятность $P_4(k)$ достижения состояния правильного ввода знака (см. рис. 5) существенно меняется при изменении вероятностей p и p_c, но по-разному, в зависимости от числа шагов k. Диапазон изменчивости $P_4(k)$ при изменении p_d такой же, как и в случае изменчивости $P_4(k)$ при изменении p и p_c — это следует из вероятности перехода между состояниями a_1 и a_4 (см. уравнение (15)).

Вероятность $P_5(k)$ достижения состояния ложного покоя увеличивается вместе с p и p_c.

Из представленных графиков можно сделать вывод, что наилучшим результатом для достижения состояния $P_4(k)$ (благоприятного и для ЧО, и для СЧМ) является система с максимальным количеством шагов и минимальной вероятностью неправильного ввода или удаления символа ЧО. Для рассмотренных случаев количество шагов $k = 5$ и вероятность ошибки $p = p_c = 0.005$.

Заключение

Была представлена модель оценки качества вводимой человеком-оператором информации в СЧМ на основе марковских цепей. Благодаря этой модели удалось установить взаимосвязь между количеством шагов процесса в СЧМ и вероятностью ошибки оператора при вводе символа, а также рассчитать оптимальные значения данных параметров. Расчетная вероятность того, что ЧО совершит ошибку при вводе информации, является одной из основных оценок качества системы. Это имеет особое значение в случае систем реального времени, где одним из основных параметров является правильность ввода команд оператором.

Применение данной модели для оценки качества ввода информации (для большего числа операций) и расширение модели на задачи, выполняемые технической частью системы, позволяют лучше учитывать реальные условия работы ЧО в СЧМ. При этом представленная модель не учитывает всех условий деятельности оператора. Помимо этого, проблемой является сложность аналитического расчета качественных характеристик процесса ввода команд.

Представленную модель расчета вероятности того, что процесс достигнет состояния ввода ЧО правильной команды на основе марковских цепей можно использовать для введения иных качественных характеристик процесса ввода команд оператором, например, времени вознаграждения, полученного процессом ввода знака после k шагов. Также возможно применение данной модели для оценки качества других процессов, в которых присутствует последовательное выполнение действий и необходимо оценить вероятность достижения определенного состояния. Однако следует помнить, что модель имеет свои ограничения и не может учитывать все факторы, влияющие на процесс ввода информации в СЧМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бубницки З. Основы управления компьютерными системами [на польском языке], Типография Вроцлавского технологического университета, Вроцлав. 1993. С. 21–31.
2. Горячкин Б.С., Харлашкин А.И. Автоматизированная система эффективного взаимодействия человеческой и машинной компоненты на основе актуализированной классификации типов ошибок человека-оператора // Динамика сложных систем-XXI век. — 2019. — Т. 13. — №. 5. — С. 19–29.
3. Горячкин Б.С., Мышенков К.С., Харлашкин А.И. Анализ методов концептуального проектирования автоматизированных информационных систем // Динамика сложных систем-XXI век. — 2020. — Т. 14. — №. 3. — С. 23–34.
4. Качабуэ, П.К. Моделирование и симуляция поведения человека в системах управления. Издательство Springer Verlag, Лондон. 1998. С. 63–66.
5. Дхиллон, Б.С. Надежность человека с учетом человеческих факторов. Издательство Pergamon Press, Нью-Йорк. 1986. С. 27–46.
6. Хопкин, В.Д. Проблемы интерфейса человек-машина в проектировании систем управления воздушным трафиком. Сборник докладов IEEE, том 77 (11). 1989. С. 1634–1642.
7. Донигевич, А.М. Моделирование взаимодействия человека и компьютера. Проблемы оценки качества и надежности. Институт автоматизации и робототехники МУТ, Варшава. 2022. С. 10–15.
8. Ракицкий, В.Н., Березняк, И.В., Ильницкая, А.В. Модель оценки риска условий работы с использованием пестицидов: результаты и развитие. Журнал «Гигиена и санитария». 2016. В. 95. № 11. С. 1041–1044.
9. Петунин, Ю.И. Применение теории случайных процессов в биологии и медицине. Киев: Наукова думка. 1981. С. 37–47.
10. Ховард, Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. Издательство John Wiley & Sons, Лондон, 1960. С. 3–12.