СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Плетнев Л.В.,
д.ф.-м.н., завкафедрой «Высшая математика»
Данилович Л.А.,
к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»
Концевой М.Г.,
студент
Самосадов А.А.,
студент
Белорусско-Российский университет (г. Могилев, Республика Беларусь)
pletnev@tut.by

Аннотация. *Исследованы свойства определителей третьего порядка с помощью компьютерного эксперимента. Получены закономерности распределений определителей, составленных из цифр, в зависимости от величины определителей и числовые характеристики данных распределений. Установлены новые закономерности и свойства определителей.*

Ключевые слова: *определитель, распределение.*

STATISTICAL RESEARCH OF THE THIRD RANGE DETERMINANTES

L. Pletnev, L. Danilovich, M. Kantsavy, A. Samasadau
Belarus-Russia University (Mogilev, RB)

Abstract. *The properties of the third order determinants have been searched by means of computer experiment. Regularities of distributions of the determinants, composed of figures, depending on the size of determinants and numerical characteristics of these distributions have been received. New regularities and properties of determinants have been determined.*

Key words: *determinant, distribution.*

Для изучения высшей математики студентам могут потребоваться такие разделы, которые они будут изучать через год. Возникает задача интенсификации самостоятельного изучения студентами других разделов математики. В результате решения таких задач, студенты, с синергетической точки зрения, начинают более глубоко понимать взаимосвязь различных разделов математики.

Определители являются одними из простейших структур в математике. Идея введения определителей принадлежит Лейбницу, который опубликовал первое исследование, посвященное определителям в 1678 г. [1]. Дальнейшие исследования свойств определителей и матриц связаны с именами Крамера, Вандермонда, Гаусса, Коши, Бине, Кэли, Сильвестра, Кронекера, Вейерштрасса. Широко определители используются в современной математике и физике.

1. Определители с повторяющимися цифрами

В качестве одной из задач, связанных с вычислением определителей, студентам была предложена задача о вычислении определителя третьего порядка [2,3]. Общее количество определителей третьего порядка, составленных из цифр, которые могли быть все разными – $N = 9^9 = 387420489$. Очевидно, что некоторые определители равны нулю (s = 0). Однако определить общее число определителей равных нулю аналитически невозможно. Решение этой задачи было получено с помощью компьютерного эксперимента. Таких определителей оказалось 5902335 или 1,5235%.

Анализ результатов расчетов показал, что величины максимальных определителей оказались равными 1216, а величины минимальных определителей -1216. Максимальных определителей оказалось три

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 9 \\ 9 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Минимальные определители получаются из этих определителей с помощью элементарных преобразований. Положительных и отрицательных определителей оказалось равное количество – по 190759077. Дополнительный визуальный анализ полученных данных показал симметрию полученного распределения относительно s = 0.

Анализ распределения определителей по величине показал, что от минимального до максимального значения определители для некоторых значений s не существуют. На рис. 1 приведен полигон частот величин определителей, анализ которого показывает, что частоты определителей не монотонно возрастают и убывают. Распределение имеет сложный вид.

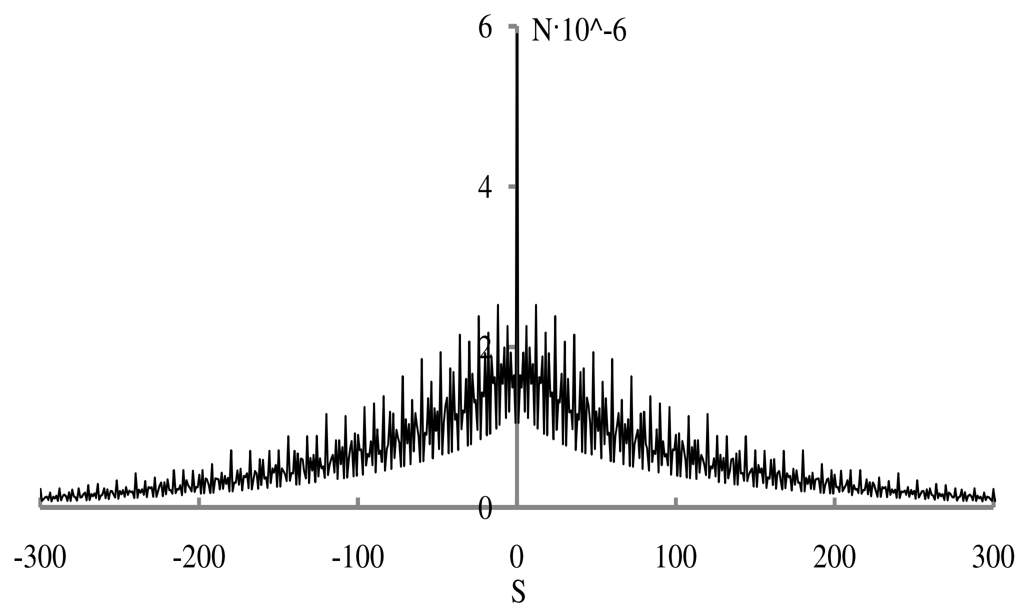

Рис. 1. Полигон частот для величин определителей s.

На рис. 2 представлена нормированная гистограммы частот определителей. Была проведена статистическая обработка полученных данных по формулам для начальных и центральных моментов [4]. Для данного распределения были получены следующие значения: среднее арифметическое $\overline{S} = 0$, среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 147{,}571$, асимметрия $A_s = 0$ и эксцесс $E_k = 0{,}26606$.

2. Определители с различными цифрами.

С помощью комбинаторики, используя перестановки из 9 элементов (различных цифр), можно подсчитать число всех возможных определителей третьего порядка $N = 9! = 362880$. Эта задача была решена с помощью нового компьютерного эксперимента. Определителей равных нулю оказалось 2736 (0,75397%). Величины максимальных определителей оказались равными 412, а величины минимальных определителей – 412. Таких определителей оказалось по 36. В таблице 2 приведены сгруппированные по 6 максимальные определители, полученные в точных расчетах.

Положительных и отрицательных определителей оказалось по 180072. Дополнительный визуальный анализ полученных данных показал симметрию полученного распределения относительно s = 0.

Таблица 1

Некоторые максимальные определители

$$\begin{vmatrix}1&4&8\\7&2&6\\5&9&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5&9&3\\1&4&8\\7&2&6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}7&2&6\\5&9&3\\1&4&8\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3&9&5\\6&2&7\\8&4&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}8&4&1\\3&9&5\\6&2&7\end{vmatrix}\begin{vmatrix}6&2&7\\8&4&1\\3&9&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&6&7\\9&3&5\\4&8&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4&8&1\\2&6&7\\9&3&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}9&3&5\\4&8&1\\2&6&7\end{vmatrix}$$

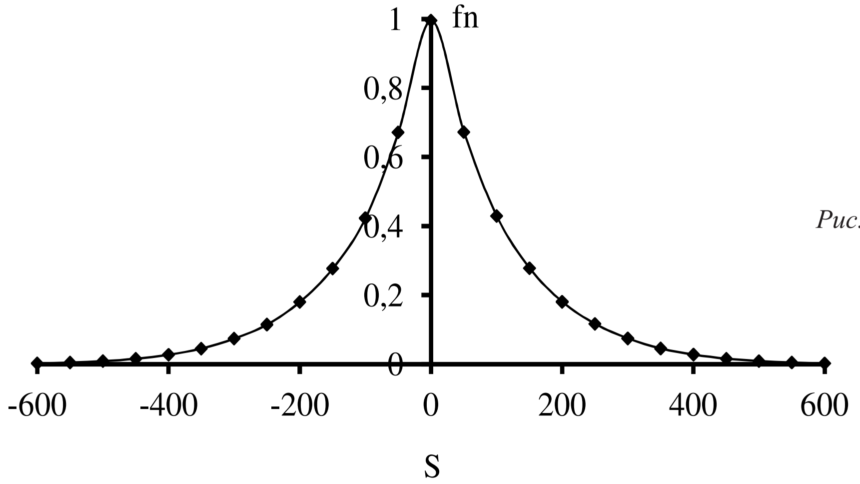

Рис. 2. Нормированные гистограммы частот величин определителей S

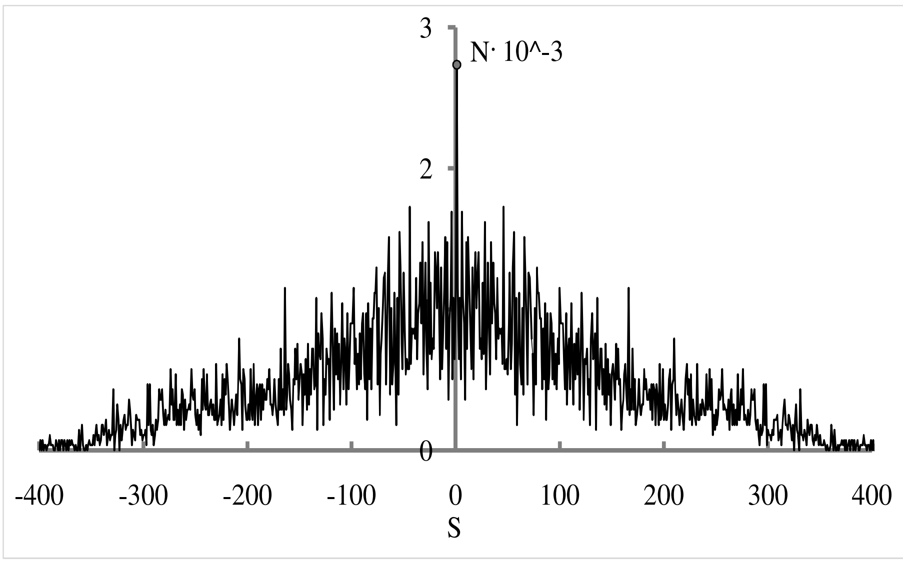

Рис. 3. Полигон частот величин определителей

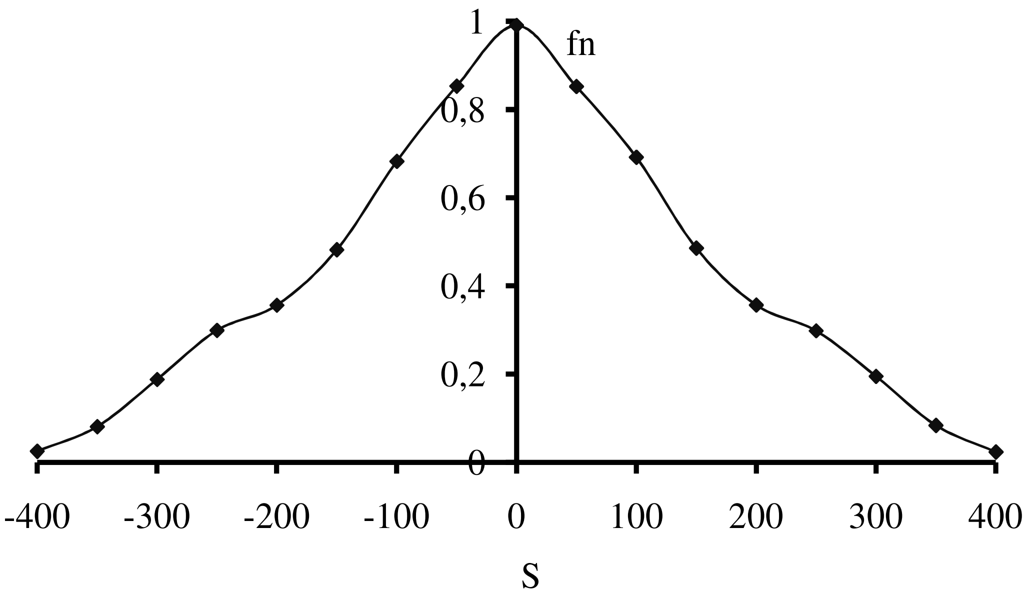

Рис. 4. Нормированная гистограмма частот для величин определителей.

Также как и в предыдущем случае в распределении определителей некоторые определители отсутствуют. Полигон частот определителей по величине представлен на рис. 3.

Вид данного полигона частот похож на полигон частот, полученных для случая с повторяющимися цифрами.

Нормированная гистограмма частот приведена на рис. 4. Для этого распределения были получены следующие числовые характеристики: среднее арифметическое $\overline{S} = 0$, среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 154{,}8537$, асимметрия $A_s = 0$ и эксцесс $E_k = 0{,}274856$.

3. Дополнительные свойства определителей

Проблема отыскания определителей с максимальными и минимальными значениями может быть решена другим способом. Можно считать величину определителя как функцию от 9 независимых переменных a_{ij}. Найдя частные производные от функции S по этим переменным, и приравняв их нулю, получим 9 алгебраических уравнений. Решение этой системы уравнений приводит к системе 3-х уравнений, зависящих от 6 независимых переменных.

Анализ этих производных позволил установить новую закономерность, связывающую частную производную от определителя по независимой переменной a_{ij} (элементу определителя) с алгебраическим дополнением

$$\frac{\partial S}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \qquad (1)$$

Эта закономерность справедлива для определителей любых порядков. Доказательство этой закономерности основывается на разложении определителя по i строке или j столбцу. Данный элемент входит в разложение только один раз и умножается на алгебраическое дополнение, которое не зависит от этого элемента.

Анализ максимальных определителей, приведенных в таблице 2, позволил установить еще одну закономерность. Если определитель повернуть на 90^0 в положительном или отрицательном направлении, то знак определителя изменится на противоположный

$$\Delta = -\Delta\downarrow. \qquad (2)$$

Если такой определитель повернуть еще на 90^0, то знак определителя изменится на противоположный, т.е. станет таким, какой был у исходного определителя. Величина такого определителя будет равна величине исходного определителя. Это свойство справедливо для определителей любых порядков с любыми элементами. Доказательство не представляет особых трудностей и начинается с определителей второго порядка.

Статистическая обработка определителей третьего порядка, выполненная с помощью компьютерного эксперимента, позволило получить новую уникальную информацию и закономерности, которые невозможно получить при традиционном подходе. Установлены новые закономерности, связанные с распределением определителей по величине. Полученные результаты можно использовать в криптографии.

Список литературы

1. Александрова, Н.В. Математические термины / Н.В. Александрова – М.: Высшая школа, 1978. – 190 с.
2. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак – Мн.: Наука и техника, 2003. – 480 с.
3. Блох, Э.Л. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения / Э.Л. Блох, Л.И. Лопшинский, В.Я. Турин. – М.: Высшая школа, 1971. – 256 с.
4. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 1977. – 480 с.