# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЛАТЕНТНЫХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ MPCM

## THE USE OF MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION FOR EVALUATE OF LATENT PARAMETERS WITHIN MPCM MODEL

**Y. Dyadkin**
**V. Bratishchenko**

*Summary.* The article is dedicated to Within-Item Partial Credit Model to be a part of Multidimensional Item response theory. The model is considered to be applicable to students' competences evaluating based on data representing students' grades on exams. The maximum likelihood estimation is used to get the system of equations that relates latent parameters within the model and empirical data. The numeric values of latent parameters have been achieved by solving the system of equations with the help of Newton's method.

*Keywords:* competences, estimation of latent parameters, Multidimensional Item Response Theory, MIRT, Multidimensional Within-Item Partial Credit Model, maximum likelihood estimation.

***Дядькин Юрий Алексеевич***
*Аспирант, ФГБО ВО «Байкальский государственный университет»; старший преподаватель, ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»*
*dyadkin_ua@inbox.ru*
***Братищенко Владимир Владимирович***
*К.ф.-м.н., доцент, ФГБО ВО «Байкальский государственный университет»*
*vvb@bgu.ru*

*Аннотация.* в статье рассматривается модель частичного оценивания многомерной современной теории тестирования, которая применяется к задаче оценки компетенций выпускников образовательных учреждений профессионального образования, основываясь на данных педагогических измерений промежуточного и итогового контроля. К модели применяется метод максимального правдоподобия для получения системы уравнений, связывающей латентные параметры модели и эмпирические данные. Решение системы уравнений производится методом Ньютона для получения численных значений латентных параметров модели.

*Ключевые слова:* компетенции, оценка латентных параметров, многомерная современная теория тестирования, MIRT, Multidimensional Within-Item Partial Credit Model, метод максимального правдоподобия.

Для оценки компетенций выпускников образовательных учреждений профессионального образования предлагается использование модели частичного оценивания Multidimensional Within-Item Partial Credit Model многомерной современной теории тестирования (Multidimensional Item Response Theory). Обоснование применения данной модели представлено в работе [1].

Одним из важнейших аспектов применения модели является оценка ее параметров. Рассмотрим методы, которые позволят их получить.

Вероятность получения первичного балла студентом по дисциплине выражается следующей формулой:

$$p_{ij} = P\left(u_{ij} = k \,\middle|\, \theta_j, b_i\right) = \frac{e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl} - b_{ik})w_{ilk}}}{\sum_{r=0}^{K_i} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl} - b_{ir})w_{ilr}}}, \quad (1)$$

где: $u_{ij}$ — категория, которую достиг студент $j$ по заданию $i$; $j = \overline{1,N}$, $N$ — число студентов; $i = \overline{1,M}$, $M$ — число заданий; $k$ — первичный балл, полученный студентом; $k = \overline{1,3}$; $\theta_j$ — вектор оценок компетенций студента $j$, где $\theta_j = \left(\theta_{j1}, \theta_{j2}, \ldots, \theta_{jm}\right)$; $\theta_{jl}$ — оценка компетенции $l$ студента $j$; $l = \overline{1,m}$; $m$ — количество оцениваемых компетенций с помощью сформированного набора заданий; $b_i$ — матрица оценок сложности задания $i$; $i = \overline{1,M}$; $b_i = (b_{ilk})_{l=\overline{1,m};k=\overline{1,3}}$; $b_{ilk}$ — сложность достижения категории $k$ задания $i$ в рамках компетенции $l$; $W = (W_{ilk})_{i=\overline{1,M};l=\overline{1,m};k=\overline{1,3}}$ — тензор, элементы которого $W_{ilk}$ характеризуют факт оценивания категории $k$ задания $i$ в рамках компетенции $l$; матрицы $W_i(W_{ilk})_{l=\overline{1,m};k=\overline{1,3}}$, $i = \overline{1,M}$, имеют непосредственную связь с матрицей компетенций образовательной программы и формируются для каждой дисциплины в отдельности. Если компетенция формируется в рамках данной дисциплины $i$, то в столбце с этой компетенцией $l$ проставляются единицы, иначе — нули.

Тогда вероятность противоположного события получения студентом первичного балла, отличного от $k$ будет вычисляться по следующей формуле:

$$q_{ij} = 1 - p_{ij} = \frac{\sum_{r=\overline{0,K_i}, r \neq k} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl} - b_{ir})w_{ilr}}}{\sum_{r=0}^{K_i} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl} - b_{ir})w_{ilr}}}, \quad (2)$$

Для оценки параметров модели используем метод максимального правдоподобия [2, 3], так как задача оценки компетенций сводится к отысканию максимума функции правдоподобия.

Запишем функцию правдоподобия в следующем виде:

$$L = \prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{N}\frac{e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ik})W_{ilk}}}{\sum_{r=0}^{K_i} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}}} \tag{3}$$

Далее выпишем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ik})W_{ilk} - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} ln(\psi_{ij}), \tag{4}$$

где

$$\psi_{ij} = \sum_{r=0}^{K_i} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}}, \tag{5}$$

Для получения вектора оценок компетенций студента $\theta_j$ и матрицы оценок сложности заданий $b_i$ найдем максимальное значение логарифмической вероятности, продифференцировав выражение по латентным переменным $\theta_j$ и $b_i$ и приравняем производные к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial lnL}{\partial \theta_{jl}} = \sum_{i=1}^{M} W_{ilk} - \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{\psi_{ij}}\cdot\sum_{r=0}^{K_i} W_{ilr}.e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}} = 0, \\ \forall j = \overline{1,N}, l = \overline{1,m}; \\ \frac{\partial lnL}{\partial b_{ik}} = -\sum_{l=1}^{m} W_{ilk}\cdot\left(1-\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\right) = 0, \\ \forall i = i = \overline{1,M}; \\ \frac{\partial lnL}{\partial b_{ir}} = \sum_{l=1}^{m} W_{ilr}\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\psi_{ij}}\cdot e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}} = 0, \\ \forall r = \overline{1,K_i}, i = \overline{1,M}, r \neq k \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) состоит из $N \cdot m + \sum_{i=1}^{M} K_i$ уравнений с $N \cdot m + \sum_{i=1}^{M} K_i$ неизвестными $\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{Nm}, b_{11}, b_{12}, \dots, b_{MK_M}$, которые можно соединить в вектор-столбец:

$$\begin{pmatrix}\theta \\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{Nm} & b_{11} & b_{12} & b_{MK_M}\end{pmatrix}^T \tag{7}$$

Решение системы найдем методом Ньютона, основное рекуррентное уравнение:

$$\begin{pmatrix}\theta^{(k+1)} \\ b^{(k+1)}\end{pmatrix} = W^{-1}\left(\theta^{(k)}, b^{(k)}\right)\begin{pmatrix}\theta^{(k)} \\ b^{(k)}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

здесь

$$\begin{pmatrix}\frac{\theta}{b}\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}\frac{\theta^{(k)}}{b^k}\end{pmatrix} -$$

значение вектора ненулевых, на $k$-ом шаге (итерации), $k = 0, 1, 2, \dots$

Матрица Якоби $W(\theta, b)$ состоит из частных производных второго порядка функции $lnL(\theta, b)$:

$$W(\theta, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta\,\partial b} \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b\,\partial\theta} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b^2} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

здесь

$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta^2}, \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta\ \partial b}, \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b\ \partial\theta}, \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b^2}$ —

подматрицы, состоящие следующих элементов (10) — (13):

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta^2} = $$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{11}^2} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{11}\partial\theta_{12}} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{11}\partial\theta_{Nm}} \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{12}\partial\theta_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{12}^2} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{12}\theta_{Nm}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{Nm}\partial\theta_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{Nm}\partial\theta_{12}} & & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{Nm}^2} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta\ \partial b} = $$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{11}\partial b_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{11}\partial b_{12}} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{11}\partial b_{MK_M}} \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{12}\partial b_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{12}\partial b_{12}} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{12}\partial b_{MK_M}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{Nm}\partial b_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{Nm}\partial b_{12}} & & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{Nm}\partial b_{MK_M}} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b\ \partial\theta} = $$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{11}\partial\theta_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{11}\partial\theta_{12}} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{11}\partial\theta_{Nm}} \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{12}\partial\theta_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{12}\partial\theta_{12}} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{12}\partial\theta_{Nm}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{MK_M}\partial\theta_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{MK_M}\partial\theta_{12}} & & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{MK_M}\partial\theta_{Nm}} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b^2} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{11}^2} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{11}\partial b_{12}} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{11}\partial b_{MK_M}} \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{12}\partial b_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b\theta_{12}^2} & \dots & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{12} b_{MK_M}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{MK_M}\partial b_{11}} & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{MK_M}\partial b_{12}} & & \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{MK_M}^2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

Выпишем формулы для вычисления, используемых в матрице Якоби, частных производных: (14), (15), (16), (17), (18), (19).

Таким образом, полученные аналитические выражения оценок латентных параметров модели могут применяться в алгоритмах для вычисления уровня сформированности компетенций выпускников.

$$\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta_{jl_1}\partial\theta_{jl_2}} = -\sum_{i=1}^{M} \frac{\frac{\partial^2\psi_{ij}}{\partial\theta_{jl_1}\theta_{jl_2}}\cdot\psi_{ij} - \frac{\partial\psi_{ij}}{\partial\theta_{jl_1}}\cdot\frac{\partial\psi_{ij}}{\partial\theta_{jl_2}}}{\left(\psi_{ij}\right)^2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2\psi_{ij}}{\partial\theta_{jl_1}\partial\theta_{jl_2}} = \sum_{r=0}^{K_i} W_{il_1r}\cdot W_{il_2r}\cdot e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{jl_1}\partial b_{ir_1}} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\left(\sum_{l=1}^{m} W_{ilr_1}\right)\cdot e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir_1})W_{ilr_1}}\cdot\sum_{r=0}^{K_i}\left(W_{il_1r_1}-W_{il_1r}\right)e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}}}{\left(\sum_{r=0}^{K_i} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}}\right)^2}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{jl_1}\partial b_{ik}} = \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{ik}\partial\theta_{jl_1}} = W_{il_1k}\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial P_{ij}}{\partial\theta_{jl_1}} = \frac{\sum_{r=0}^{K_i}\left(W_{il_1k}-W_{il_1r}\right)e^{\sum_{l=1}^{m}[(\theta_{jl}-b_{ir})W_{ilr}+(\theta_{jl}-b_{ik})W_{ilk}]}}{\left(\sum_{r=0}^{K_i} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})}W_{ilr}\right)^2}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial b_{ik}\partial b_{ir_1}} = \frac{\sum_{l=1}^{m} W_{ilk}\cdot\sum_{l=1}^{m}\left(-W_{ir_1}\right)\cdot e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir_1})W_{ilr_1}}}{\left(\sum_{r=0}^{K_i} e^{\sum_{l=1}^{m}(\theta_{jl}-b_{ir})}W_{ilr}\right)^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{jl_1}\partial\theta_{ir_1}} = \frac{\partial^2 lnL(\theta,b)}{\partial\theta_{ir_1}\partial\theta_{jl_1}} \quad (19)$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Дядькин Ю. А. Сравнение моделей теорий IRT и MIRT для оценки компетенций студентов / Ю. А. Дядькин // Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики.— 2019.— № 5.— С. 49–53.
2. Darrell Bock R. Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: Application of an EM algorithm / R. Darrell Bock, M. Aitkin // Psychometrika.— 1981.— V. 46 — № 4.— P. 443–459.
3. Volodin N. The estimation of polytomous item response models with many dimensions [Электронный ресурс] / N. Volodin, R. J. Adams.— Режим доступа: https://www.acer.org/files/Conquest-TheEstimateOfPolytomousItemResponseModelsWithManyDimensions.pdf. Дата обращения: 20.07.19.