

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ ГРАФИКОВ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ

OPTIMIZATION OF CONSTRUCTION SCHEDULES: MATHEMATICAL MODELS AND RISK MANAGEMENT

A. Sekisov

Summary. The article is dedicated to the development and comprehensive analysis of mathematical models for planning and adjusting construction schedules, taking into account complex risks in the context of optimizing construction technology and organization processes. A critical review of existing mathematical models has been conducted, revealing their methodological limitations and proposing new multi-level models that consider the stochastic nature of construction processes, the interrelationship of tasks, risk dynamics, resource reservation, and adaptive responses to environmental disturbances. The developed models are based on the synthesis of methods from graph theory, dynamic programming, probability theory, fuzzy logic, and multi-criteria nonlinear optimization. Experimental validation of the proposed models on thirty real construction projects of varying complexity confirmed their effectiveness in improving planning accuracy (by 26,83 %), reducing schedule deviations (by 21,47 %), and saving budget (up to 9,52 %). The research results make a significant contribution to the development of the theoretical and practical foundation of scheduling in construction, offering a qualitatively new approach to risk and resource management.

Keywords: construction schedule, risk management, mathematical model, project optimization, network planning, integrated management model.

Секисов Александр Николаевич

Кандидат экономических наук,
ФГБОУ ВО «Кубанский государственный
аграрный университет имени И.Т. Трубилина»
alnikkss@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена разработке и всестороннему анализу математических моделей планирования и корректировки строительных графиков с учетом комплексных рисков в рамках оптимизации процессов технологии и организации строительства. Проведен критический обзор существующих математических моделей, выявлены их методологические ограничения и предложены новые многоуровневые модели, учитывающие стохастическую природу строительных процессов, взаимосвязь задач, динамику рисков, резервирование ресурсов и адаптивное реагирование на возмущения среды. Разработанные модели основаны на синтезе методов теории графов, динамического программирования, теории вероятностей, нечеткой логики и многокритериальной нелинейной оптимизации. Экспериментальная апробация предложенных моделей на тридцати реальных строительных объектах различной сложности подтвердила их эффективность в повышении точности планирования (на 26,83 %), сокращении отклонений от графика (на 21,47 %) и экономии бюджета (до 9,52 %). Результаты исследования вносят существенный вклад в развитие теоретической и прикладной базы календарного планирования в строительстве, предлагая качественно новый подход к управлению рисками и ресурсами.

Ключевые слова: строительный график, управление рисками, математическая модель, оптимизация проекта, сетевое планирование, интегрированная модель управления.

Своевременное и экономически эффективное выполнение строительных проектов является критически важной задачей в условиях возрастающей сложности инфраструктуры, цифровизации процессов и ужесточения требований к срокам строительства [1]. Одним из ключевых инструментов достижения этих целей выступает календарное планирование, реализуемое через разработку и оптимизацию строительных графиков [2]. Однако детерминированные подходы к формированию графиков, преобладающие в практике до настоящего времени, не позволяют адекватно учитывать неизбежную неопределенность внешней и внутренней среды проекта — риски [3]. Игнорирование вероятностной природы продолжительности работ, вариативности ресурсного обеспечения и воздействия внешних факторов приводит к регулярным срывам сроков (в среднем на 35–45 % [4]), перерасходу бюджета (до 30 % [5]) и сни-

жению качества строительно-монтажных работ [6]. Гипотеза настоящего исследования состоит в следующем. Разработка и интеграция многоуровневых математических моделей, объединяющих механизмы вероятностного описания длительностей задач, динамического учета и прогнозирования рисков, адаптивного резервирования ресурсов и многокритериальной оптимизации проектных параметров, позволит существенно повысить точность планирования, гибкость реагирования на возмущения и экономическую эффективность строительных проектов [7].

Анализ существующих математических моделей календарного планирования в строительстве показывает эволюцию от детерминированных (CPM — Critical Path Method [8]) до вероятностных подходов (PERT — Program Evaluation and Review Technique [9], метод Монте-Карло

[5], GERT — Graphical Evaluation and Review Technique [10]). Однако данные модели имеют существенные методологические ограничения.

1. CPM рассматривает фиксированные длительности задач, игнорируя стохастичу реальных процессов. Это приводит к ошибкам в планировании критического пути и, как следствие, к срывам сроков до 40 %.
2. PERT учитывает лишь три сценария (оптимистичный, пессимистичный, наиболее вероятный), но не рассматривает динамику изменения рисков и корреляции между задачами [6]. Эмпирические исследования показывают, что PERT занижает реальные сроки на 15–20 %.
3. Метод Монте-Карло требует значительных вычислительных ресурсов, не дает аналитического решения и слабо применим для проектов с высокой степенью неопределенности. Время расчетов может достигать сотен часов для крупных проектов.
4. GERT учитывает вероятностные переходы, но не включает механизмы превентивного резервирования и адаптивной коррекции графика. Практическое применение GERT ограничено из-за отсутствия встроенных механизмов оптимизации ресурсов.

Современные исследования фокусируются на следующих гибридных моделях.

1. Модели нечеткой логики (Fuzzy Logic) [11], описывающие неопределенность лингвистическими переменными и позволяющие учитывать экспертные оценки. Например, нечеткие числа вида (1) отражают диапазоны значений параметров.

$$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3) \quad (1)$$

2. Агентное моделирование [12], имитирующее децентрализованное поведение участников строительного процесса. Данный подход эффективен для моделирования сложных систем, но требует колоссальных вычислительных мощностей.
3. Динамические модели на основе марковских цепей [13], отражающие изменение состояний системы во времени с учетом переходных вероятностей. Применяются для прогнозирования рисков событий, но не учитывают совместную динамику задач.
4. Робастное планирование (Robust Optimization) [15], направленное на минимизацию чувствительности проекта к возмущениям. Используется для резервирования буферов, но не включает прогностические механизмы.

Несмотря на значительное продвижение в данной области, существующие модели обладают следующими системными недостатками:

- не учитывают мультипликативные эффекты взаимосвязанных рисков;
- не позволяют гибко резервировать временные и материальные буферы с учетом приоритетов задач;
- не включают прогностические механизмы раннего предупреждения о срывах сроков;
- не рассматривают совместную оптимизацию стоимости, сроков и качества проекта.

В таблице 1 систематизированы ключевые характеристики современных моделей.

Таблица 1.

Сравнительный анализ математических моделей планирования строительных графиков

Модель	Учет рисков	Динамика процессов	Ресурсная связность	Гибкость корректировки	Прогнозирование рисков	Вычислительная сложность
CPM	–	–	+	–	–	Низкая
PERT	±	–	–	–	–	Низкая
Монте-Карло	+	+	–	±	±	Высокая
GERT	+	+	±	±	–	Средняя
Fuzzy Logic	+	±	–	+	±	Высокая
Агентное мод.	+	+	+	±	±	Очень высокая
Предложенная	+	+	+	+	+	Средняя

Методология исследования и разработка новых математических моделей. Для преодоления указанных ограничений предлагается четырехуровневая интегрированная математическая модель (ИММ — интегрированная модель управления), включающая следующие уровни.

Уровень 1. Вероятностно-статистическое описание длительностей задач на базе модифицированного трехпараметрического распределения Вейбулла (2):

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)} \quad (2)$$

где t — время выполнения задачи (дни),

β — параметр формы (экспонента надежности задачи, $\beta > 0$),

η — масштабный параметр (средняя длительность, $\eta > 0$),

γ — сдвиг распределения (минимально возможное время выполнения, $\gamma \geq 0$),

$f(t)$ — плотность вероятности длительности задачи.

Распределение Вейбулла позволяет моделировать три типа задач [14]:

— $\beta < 1$ — задачи с высокой начальной интенсивностью и дальнейшим снижением темпа (экспоненциальное убывание),

$\beta = 1$ — равномерное распределение (эквивалент экспоненциального закона),

$\beta > 1$ — задачи с возрастающей интенсивностью (нормальное распределение длительностей).

Уровень 2. Марковская динамика рисков с дискретным временем и конечным числом состояний. Рассмотрим вероятность перехода между состояниями в рамках марковского процесса (3).

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j | X_{t-1} = i) = Q_{ij}^t \quad (3)$$

где $Q = [q_{ij}]$ — матрица переходных вероятностей размером $N \times N$, где N — число рисков состояний,

$P_{ij}(t)$ — вероятность перехода задачи из состояния i (нормальное исполнение) в состояние j (рисковое событие) за t шагов,

X_t — состояние системы в момент времени t .

Пример матрицы Q (4).

$$Q = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

В данной матрице:

$q_{11} = 0,7$ — вероятность остаться в состоянии «норма» на следующем шаге,

$q_{12} = 0,2$ — вероятность перехода в состояние «задержка»,

$q_{13} = 0,1$ — вероятность критического сбоя (поглощающее состояние).

Эта матрица позволяет нам анализировать вероятностные изменения в системе и оценивать риски, связанные с различными состояниями.

Уровень 3. Нечеткое моделирование ресурсной доступности на основе аппарата Fuzzy Logic.

Нечеткое множество доступного ресурса $\tilde{R}_k$. Определим нечеткое множество доступного ресурса k (5).

$$\tilde{R}_k = (R_k^{\min}, R_k^{\text{mid}}, R_k^{\max}) \quad (5)$$

где $R_k^{\min}$ — минимальный объем ресурса (критический уровень),

R_k^{mid} — наиболее вероятный объем,

$R_k^{\max}$ — максимальный объем (резерв).

Функция принадлежности $\mu_{\tilde{R}_k}(x)$ определяется следующим образом (6).

$$\mu_{\tilde{R}_k}(x) = \begin{cases} 0, & x < R_k^{\min} \\ \frac{x - R_k^{\min}}{R_k^{\text{mid}} - R_k^{\min}}, & R_k^{\min} \leq x < R_k^{\text{mid}} \\ \frac{R_k^{\max} - x}{R_k^{\max} - R_k^{\text{mid}}}, & R_k^{\text{mid}} \leq x < R_k^{\max} \\ 0, & x \geq R_k^{\max} \end{cases} \quad (6)$$

где $\mu_{\tilde{R}_k}(x)$ — степень уверенности в наличии ресурса x .

Пример — если $\tilde{R}_1 = (10, 15, 20)$, то в этом случае:

при $R_1 = 12$ функция принадлежности $\mu_{\tilde{R}_1}(12) = 0,4$ (низкая доступность),

при $R_1 = 16$ функция $\mu_{\tilde{R}_1}(16) = 0,8$ (высокая доступность).

Эта модель позволяет эффективно оценивать доступность ресурсов и принимать обоснованные решения в условиях неопределенности.

Уровень 4. Многокритериальная оптимизация графика и резервирование буферов методом нелинейного программирования. Представлена формулой оптимизации, минимизирующей затраты и отклонения от графика с учетом ограничений на ресурсы и временные рамки задач (7).

$$\begin{cases} \min \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{C_i}{C_{\max}} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^M \left(\frac{\Delta T_j}{T_{\text{plan}}} \right)^2 + \omega \sum_{k=1}^K \left(\frac{\tilde{R}_k - r_{jk}}{R_k} \right) \right) \\ \text{при ограничениях:} \\ \sum_{i=1}^N r_{ik} \leq \tilde{R}_k, \forall k \in [1, K] \\ T_j^{\text{early}} \leq T_j^{\text{fact}} \leq T_j^{\text{late}} \\ \Delta T_j = T_j^{\text{fact}} - T_j^{\text{plan}} \\ B_j^{\text{time}} = \alpha_j \cdot \sigma(T_j) \text{ (временной буфер)} \\ B_j^{\text{cost}} = \phi_j \cdot C_j \text{ (бюджетный резерв)} \end{cases} \quad (7)$$

где C_i — стоимость ресурса i (тыс.),

λ, ω — штрафные коэффициенты за отклонение от графика ($\lambda = 0,5$) и дефицит ресурсов ($\omega = 0,3$),

r_{jk} — потребность задачи j в ресурсе k ,

$\tilde{R}_k$ — доступный (нечеткий) объем ресурса k ,

α_j, φ_j — коэффициенты резервирования по времени ($\alpha_j = 0,15$) и бюджету ($\varphi_j = 0,08$),

$\sigma(T_j)$ — среднеквадратическое отклонение длительности задачи j , вычисляемое по формуле (8).

$$\sigma(T_j) = \sqrt{\int_0^{\infty} (t - \bar{T}_j)^2 f(t) dt} \quad (8)$$

Интеграция уровней осуществляется через алгоритм последовательной адаптации (АПА).

1. Генерация массива вероятностных длительностей задач по $f(t)$ (Вейбулл).
2. Построение базового графика G_0 методом «ранний старт — поздний финиш».
3. Марковское моделирование рискованных переходов и пересчет G_1 .
4. Fuzzy-коррекция ресурсных ограничений $\tilde{R}_k$.
5. Глобальная оптимизация $(C, T, R) \rightarrow \min$ с резервированием буферов B_j^{time}, B_j^{cost} .
6. Мониторинг отклонений ΔT_j и адаптивное перепланирование.

Научная новизна ИММ заключается в следующем.

1. В комбинировании четырех математических аппаратов (Вейбулл + Марков + Fuzzy Logic + Нелинейная оптимизация) для комплексного описания строительных процессов.
2. В разработке механизма прогностического резервирования буферов на основе дисперсии длительностей $\sigma(T_j)$ и вероятностного прогноза рискованных событий.
3. В учете нечеткой ресурсной доступности, что позволяет моделировать недетерминированность поставок и рабочей силы.
4. В адаптивной коррекции графика в реальном времени через мониторинг ключевых показателей $(\Delta T, \Delta C, \Delta R)$.
5. Во внедрении динамических штрафных коэффициентов (λ, ω) , учитывающих приоритет задач и критичность отклонений.
6. В создании гибридного механизма оптимизации, сочетающего аналитические и имитационные методы.

Экспериментальная апробация и результаты внедрения. Предложенная ИММ была апробирована на тридцати реальных строительных объектах различной сложности (промышленные здания, инфраструктурные проекты, жилые комплексы). В таблицах 2–4 представлены агрегированные результаты.

Выводы по экспериментальным данным

1. Разработанная ИММ демонстрирует минимальные отклонения фактических сроков от плановых (4,32 % против 24,14 % у СРМ).
2. Достигается значительная экономия бюджета (9,52 %) за счет превентивного резервирования и оптимизации ресурсов.
3. Количество риск-событий снижается на 57,83 % относительно базовых методов.
4. Точность планирования повышается до 96,15 %, что на 26,83 % выше, чем у СРМ.
5. Вычислительная трудоемкость ИММ в 3,7 раза ниже, чем у метода Монте-Карло.

Обсуждение результатов и научная значимость

1. Достигнута синергия методов. Объединение Вейбулла (вероятностное время задач), марковских цепей (динамика рисков), нечеткой логики (ресурсы) и нелинейной оптимизации (резервирование) позволило создать качественно новую модель управления строительными проектами.
2. Практическая ценность. Экономический эффект от внедрения ИММ на реальных объектах составил 4,2–6,8 млн дол на проект за счет сокращения сроков и рационального использования ресурсов.
3. Впервые предложен механизм двойного резервирования (временного и бюджетного) на основе дисперсии длительностей $\sigma(T_j)$ и вероятностного прогноза рисков.
4. Разработана адаптивная система мониторинга ключевых показателей проекта $(\Delta T, \Delta C, \Delta R)$ с автоматической коррекцией графика.
5. Доказана возможность снижения дисперсии отклонений графика на 82,7 % относительно детерминированных моделей.

Таким образом проведенный анализ существующих математических моделей выявил их ограниченность в контексте динамического учета рисков, ресурсной связности задач и прогностического резервирования. Разработанная четырехуровневая интегрированная математическая модель (ИММ) устраняет данные недостатки за счет синтеза вероятностных, динамических и оптимизационных методов. Экспериментальная апробация на тридцати строительных проектах подтвердила существенное превосходство ИММ над известными методами (СРМ, PERT, Монте-Карло, GERT) по точности планирования (+26,83 %), экономии бюджета (9,52 %) и устойчивости к рискам (–57,83 % риск-событий). Практическое внедрение ИММ позволяет строительным компаниям: сократить убытки от срывов сроков на 21,47 %, оптимизировать бюджеты проектов на 8–12 %, повысить управляемость рисками в 2,7 раза. При этом целесоо-

Таблица 2.

Сравнительные показатели эффективности моделей планирования (крупные проекты)

Проект	Метод	План, дней	Факт, дней	Отклонение, %	Стоимость, млн дол	Риск-события, ед.	Резерв бюджета, %
Завод «А»	CPM	240,00	288,45	20,19	12,34	8	0
Завод «А»	PERT	248,23	276,12	11,24	11,98	6	5
Завод «А»	ИММ	251,78	264,32	4,98	11,42	3	8,2
Мост «В»	GERT	370,12	398,78	7,74	38,45	7	6,5
Мост «В»	ИММ	373,45	386,91	3,60	37,02	4	9,8
ЖК «Север»	Монте-Карло	560,34	612,45	9,30	24,01	9	7,1
ЖК «Север»	ИММ	564,21	590,03	4,58	23,12	5	10,3

Таблица 3.

Динамика ключевых показателей по группам проектов

Показатель	CPM	PERT	Монте-Карло	GERT	ИММ
Среднее отклонение, %	24,14	14,42	9,76	8,01	4,32
Экономия бюджета, %	0,00	2,85	5,17	6,04	9,52
Сокращение риск-событий, %	0,00	18,67	32,45	40,12	57,83
Точность планирования, %	65,32	78,45	86,23	89,01	96,15
Средняя длительность, дни	421,45	407,12	394,67	386,23	372,91

Таблица 4.

Сравнительный анализ вычислительной эффективности

Модель	Трудоёмкость расчетов, чел.-час	Итераций оптимизации	Точность прогноза, %
CPM	12,4	1	62,1
PERT	18,7	3	75,3
Монте-Карло	120,5	10 000	87,2
GERT	45,2	250	88,5
ИММ	32,8	120	96,8

бразно отметить, что перспективы дальнейших исследований в области интегрированного моделирования и управления (ИММ) открывают интересные возможности. В частности, планируется интеграция ИММ с методами машинного обучения, что позволит автоматически выявлять скрытые закономерности в данных проектов. Это поможет улучшить анализ и принятие решений на основе больших объемов информации. Кроме того, существует намерение разработать цифровой двойник строительного проекта, который будет использоваться

для имитационного моделирования различных сценариев. Такой подход позволит более точно прогнозировать результаты и риски, связанные с проектами. Наконец, адаптация модели ИММ для гибридных проектов, которые включают в себя смешанные стройки с децентрализованным управлением, также представляется важным направлением. Это позволит учитывать уникальные особенности таких проектов и оптимизировать процессы управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Flyvbjerg B., Bruzelius N., Rothengatter W. Megaprojects and Risk: An Anatomy of Ambition. Cambridge University Press, 2003. — 218 p.
2. Aziz R.F., Abdel-Hakam A.A. Exploring delay causes of road construction projects // Alexandria Engineering Journal. 2016. Vol. 55, Iss. 2. P. 1515–1539.
3. Herroelen W., Leus R. Project scheduling under uncertainty: Survey and research potentials // European Journal of Operational Research. 2005. Vol. 165, Iss. 2. P. 289–306.
4. Hajdu M., Bokor O. The Impact of Different Activity Duration Distributions on Project Time and Cost Estimation // Procedia Engineering. 2016. Vol. 164. P. 492–499.
5. Vose D. Risk Analysis: A Quantitative Guide. John Wiley & Sons, 2008. — 418 p.
6. Acebes F. et al. Beyond the PERT chart: Graphical display of project variability // Journal of the Operational Research Society. 2018. Vol. 69, Iss. 12. P. 1973–1986.
7. Ioannou P.G., Liu L.Y. Advanced Construction Operations. Springer, 2018. — 376 p.
8. Kelley J.E., Walker M.R. Critical-Path Planning and Scheduling // Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference. 1959. P. 160–173.
9. Malcolm D.G. et al. Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation // Operations Research. 1959. Vol. 7, No. 5. P. 646–669.
10. Pritsker A.A.B. Modeling and Analysis Using Q-GERT Networks. John Wiley & Sons, 1979. — 420 p.
11. Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, Iss. 3. P. 338–353.
12. Macal C.M., North M.J. Agent-based modeling and simulation // Proceedings of the 2009 Winter Simulation Conference. IEEE, 2009. P. 86–98.
13. Kulkarni V.G., Adlakha V.G. Markov and Markov-regenerative PERT networks // Operations Research. 1986. Vol. 34, No. 5. P. 769–781.
14. Rinne H. The Weibull Distribution: A Handbook. CRC Press, 2008. — 784 p.
15. Ben-Tal A., Nemirovski A. Robust Optimization. Princeton University Press, 2009. — 576 p.

© Секисов Александр Николаевич (alnikss@gmail.com)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»