ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Волянский Р.С.,
к.т.н., доцент, Днепродзержинский государственный технический университет,
voliansky@ua.fm
Садовой А.В.,
д.т.н., профессор, Днепродзержинский государственный технический университет,
sadovoy@dstu.dp.ua

Аннотация: *Материалы XVIII Международной открытой научной конференции (Lorman, MS, USA, January 2013)/ Главный редактор, доктор технических наук, профессор, О.Я.Кравец. – Lorman, MS, USA: Science Book Publishing House, 2013.*

ITERATIVE METHOD FOR STUDYING THE FREQUENCY CHARACTERISTICS OF NONLINEAR DYNAMIC OBJECTS

Volianskii R.S.,
Ph.D., docent, Dniprodzerzhinsk Technical State University,
Sadovoi A.V.,
Doctor of Technical Sciences, professor, Dniprodzerzhinsk Technical State University

Abstract: *Proceedings of the XVIII-th International Open Science Conference (Lorman, MS, USA, January 2013)/ Editor in Chief Dr. Sci., Prof. O.Ya. Kravets. - Lorman, MS, USA: Science Book Publishing House, 2013.*

Введение. Современный уровень развития производственных отношений требует постоянного повышения качества выпускаемой продукции и улучшения оказываемых услуг, что невозможно без совершенствования процесса производства. Этому способствует существующая материальная база информационной, преобразовательной и исполнительной техник, которая создает все предпосылки для разного рода модернизаций и позволяет не только реализовать известные принципы и законы управления, но и внедрять принципиально новые алгоритмы управления исполнительными устройствами, отдельными технологическими процессами и производством в целом с целью улучшения их технико-экономических характеристик.

Таким образом возникает задача, связанная с разработкой и исследованием новых систем управления. Одним из подходов к решению этой задачи является использование нелинейных алгоритмов управления, которое базируется на реализации скользящих режимов первого [1] и более высоких порядков [2].

Анализу свойств и характеристик систем, работающих в скользящем режиме, посвящено достаточно большое количество публикаций. Эти публикации базируются на рассмотрении движения системы в n-мерном фазовом пространстве, которое для наглядности разбивается априори выбранными фазовыми плоскостями [3]. Очевидно, что выбор секущей фазовой плоскости для многомерного объекта является сугубо субъективным и может привести к потере информации о системе. Еще больший элемент субъективизма вносит метод функций Ляпунова [4], использование которого для нелинейных систем вообще-то является нетривиальной задачей, связанной с рассмотрением неквадратичных функций Ляпунова [2]. Последние являются математической абстракцией и не отражают физику процессов преобразования энергии в рассматриваемой системе, что затрудняет интерпретацию полученных результатов.

Известно, что о свойствах линейных систем управления достаточно полное представление можно получить путем изучения их частотных характеристик [3]. Для нелинейных систем изучение частотных характеристик затруднено невозможностью использовать принцип суперпозиций и отсутствием аналитического описания частотной передаточной функции нелинейной системы, попытка линеаризации которой приводит к потере информации о свойствах системы.

Поэтому исследования, посвященные изучению свойств систем управления динамическими объектами, в которых возникают скользящие режимы являются актуальными.

Постановка задач исследования. Целью настоящего исследования является разработка метода определения частотных характеристик нелинейной динамической системы на основании уравнений ее движения.

Материалы исследования

1. Математические основы

Рассмотрим динамический объект, движение которого описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} py_1 = f_1\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right); \\ py_2 = f_2\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right); \\ \ldots \\ py_n = f_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, U\right). \end{gathered} \tag{1}$$

Необходимо отметить, что в самом общем случае система (1) может описывать движение не только объекта управления, но и всей замкнутой системы в целом, поэтому в последнем уравнении U следует рассматривать как задающее воздействие.

Будем считать, что функции $f_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$, $i = 1, \ldots, n$ непрерывны и дифференцируемы по всем аргументам во всей области определения и выходом объекта (1) является переменна y_1. Тогда предлагаемая методика определяет значения частотной передаточной функции

$$W\left(j\omega\right) = \frac{y_1\left(U\left(j\omega\right), j\omega\right)}{U\left(j\omega\right)}. \tag{2}$$

Для нахождения значений передаточной функции (2) выполним в уравнениях (1) замену оператора Лапласа p на оператор Фурье $j\omega$

$$\begin{gathered} j\omega \cdot y_1 = f_1\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right); \\ j\omega \cdot y_2 = f_2\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right); \\ \ldots \\ j\omega \cdot y_n = f_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, U\right) \end{gathered} \tag{3}$$

и введем новые функции $g_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$, подчиняющиеся соотношению

$$\begin{gathered} g_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \omega\right) = f_i\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) - \\ - j\omega \cdot y_i,\ i = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда с учетом выражения (4) уравнения (3) можно представить в виде

$$\begin{gathered} g_1\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \omega\right) = 0; \\ g_2\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, \omega\right) = 0; \\ \ldots \\ j\omega \cdot y_n = f_n\left(y_1, y_2, \ldots, y_n, U\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Выделим из системы (5) первые $n-1$ уравнения и представим их в матричной форме

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{y}, \omega\right) = \mathbf{0}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}\left(\mathbf{y}, \omega\right) = \begin{pmatrix} g_1\left(\mathbf{y}, \omega\right) \\ \ldots \\ g_{n-1}\left(\mathbf{y}, \omega\right) \end{pmatrix}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Решим уравнение (6) и определим координаты движения объекта (1) y_i, $i = 2, \ldots, n$ через выходную координату y_1.

В силу своей существенной нелинейности матричное уравнение (6) может быть решено только численно. Для его решения будем использовать метод

Ньютона, хотя его использование не является обязательным и могут использоваться любые методы решения нелинейных уравнений, оперирующие с комплексными числами.

В соответствии с [5] решение уравнения следует искать в виде следующей итерационной зависимости

$$\mathbf{y}\left[k+1\right]=\mathbf{y}\left[k\right]+\Delta\mathbf{y}\left[k\right], \qquad (8)$$

где вектор приращений $\Delta\mathbf{y}\left[k\right]$

$$\Delta\mathbf{y}\left[k\right]=\begin{pmatrix}\Delta y_2\left[k\right]\\ \Delta y_3\left[k\right]\\ \dots\\ \Delta y_n\left[k\right]\end{pmatrix} \qquad (9)$$

определяется в результате решения матричного уравнения вида

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{y}\left[k\right],\omega\right)+\mathbf{J}\left(\mathbf{y}\left[k\right]\right)\Delta\mathbf{y}\left[k\right]=\mathbf{0}, \qquad (10)$$

здесь $\mathbf{J}\left(\mathbf{y}\left[k\right]\right)$ – якобиан вектор-функции $\mathbf{g}\left(\mathbf{y},\omega\right)$, который определяется следующим образом

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{y}\left[k\right]\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_1\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial g_1\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_n}\\ \frac{\partial g_2\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_2\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial g_2\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial g_{n-1}\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_2} & \frac{\partial g_{n-1}\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_3} & \dots & \frac{\partial g_{n-1}\left(\mathbf{y},\omega\right)}{\partial y_n}\end{pmatrix} \qquad (11)$$

причем

$$\det\left(\mathbf{J}\left(\mathbf{y}\left[k\right]\right)\right)\neq 0. \qquad (12)$$

Решение матричного уравнения (10) относительно вектора приращений $\Delta\mathbf{y}\left[k\right]$ позволяет получить следующее соотношение

$$\Delta\mathbf{y}\left[k\right]=-\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{y}\left[k\right]\right)\mathbf{g}\left(\mathbf{y}\left[k\right],\omega\right). \qquad (13)$$

Подставив выражение (13) в зависимость (8), получим

$$\mathbf{y}\left[k+1\right]=\mathbf{y}\left[k\right]-\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{y}\left[k\right]\right)\mathbf{g}\left(\mathbf{y}\left[k\right],\omega\right). \qquad (14)$$

Вычисление вектора $\mathbf{y}\left[k+1\right]$ заканчивается, когда выполняется условие

$$\left\|\mathbf{y}\left[k+1\right]-\mathbf{y}\left[k\right]\right\|\leq\varepsilon \qquad (15)$$

или

$$\left\|\mathbf{J}^{-1}\left(\mathbf{y}\left[k\right]\right)\mathbf{g}\left(\mathbf{y}\left[k\right],\omega\right)\right\|\leq\varepsilon. \qquad (16)$$

Изменение значений координаты возмущенного движения y_1 на отрезке [-1,1] позволяет представить компоненты вектора $\mathbf{y}$ следующими зависимостями

$$y_i=h_i\left(y_1,\omega\right),\ i=2,\dots,n. \qquad (17)$$

Подставив в последнее уравнение системы (5) вместо координат возмущенного движения их значения (17) и разделив его на y_1, получим аналог частотного характеристического уравнения для нелинейной системы

$$\frac{j\omega\cdot h_n\left(y_1,\omega\right)}{y_1}=\frac{f_n\left(y_1,h_2\left(y_1,\omega\right),\dots,h_n\left(y_1,\omega\right),U\right)}{y_1}, \qquad (18)$$

которое после преобразований может быть представлено следующим образом

$$\frac{f_n\left(y_1,h_2\left(y_1,\omega\right),\dots,h_n\left(y_1,\omega\right),U\right)}{j\omega\cdot h_n\left(y_1,\omega\right)}=1 \qquad (19)$$

или

$$g\left(y_1,U,\omega\right)=0, \qquad (20)$$

где

$$g\left(y_1,U,\omega\right)=\frac{f_n\left(y_1,h_2\left(y_1,\omega\right),\dots,h_n\left(y_1,\omega\right),U\right)}{j\omega\cdot h_n\left(y_1,\omega\right)}-1. \qquad (21)$$

Решение уравнения (19) будем искать в виде

$$y_1\left[k\right]=y_1\left[k-1\right]-\frac{g\left(y_1\left[k-1\right],U,\omega\right)}{\left.\frac{\partial}{\partial y_1}g\left(y_1,U,\omega\right)\right|_{y_1\left[k-1\right]}}. \qquad (22)$$

Результат, аналогичный описываемому выражением (22), может быть получен непосредственно путем решения всей системы (5). Однако предложенный подход, приводящий к получению частотного характеристического уравнения (19), позволяет в дальнейшем использовать методы исследования устойчивости системы, базирующиеся на анализе этого уравнения [6].

Использование итерационной зависимости (22) позволяет определить координату y_1 как функцию частоты и задающего воздействия, т.е.

$$y_1 = q\left(U,\omega\right). \tag{23}$$

В свою очередь, подстановка выражения (23) в уравнение (20) позволяет привести его к виду

$$G\left(U,\omega\right) = 0 \tag{24}$$

и исследовать частотное характеристическое уравнение нелинейной системы.

Кроме этого, выражение (23) позволяет записать частотную передаточную функцию (2) следующим образом

$$W\left(j\omega\right) = \frac{q\left(U\left(j\omega\right),\omega\right)}{U\left(j\omega\right)}, \tag{25}$$

на основании которой могут быть получены необходимые частотные характеристики.

Рассмотрим использование предложенной методики на примерах.

2. Примеры

2.1 Линейная динамическая система первого порядка

Очевидно, что линейные объекты являются частным случаев нелинейных, поэтому для подтверждения корректности предлагаемого метода рассмотрим его использование для анализа линейных систем.

Будем рассматривать динамический объект, движение которого описывается уравнением

$$py_1 = a_{11}y_1 + m_1U \tag{26}$$

и осуществляется под действием управляющего воздействия

$$U = g\left(y_1^* - y_1\right), \tag{27}$$

где y_1^* - желаемое значение координаты y_1.

Подставив управление (27) в уравнение (26), получим

$$py_1 = a_{11}y_1 + m_1 g\left(y_1^* - y_1\right) \tag{28}$$

или

$$py_1 = \left(a_{11} - m_1 g\right)y_1 + m_1 g y_1^*. \tag{29}$$

Заменив в уравнении (29) оператор Лапласа на оператор Фурье, получим следующую зависимость

$$\frac{\partial}{\partial y_1} g\left(y_1,\omega\right) = a_{11} - m_1 g - j\omega. \tag{30}$$

Тогда

$$g\left(y_1,\omega\right) = \left(a_{11} - m_1 g - j\omega\right)y_1 + m_1 g y_1^* \tag{29}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y_1} g\left(y_1,\omega\right) = a_{11} - m_1 g - j\omega. \tag{30}$$

Подставив выражения (29) и (30) в зависимость (22), получим

$$\begin{gathered} y_1\left[k\right] = y_1\left[k-1\right] - \\ - \frac{\left(a_{11} - m_1 g - j\omega\right)y_1\left[k-1\right] + m_1 g y_1^*}{a_{11} - m_1 g - j\omega} \end{gathered} \tag{31}$$

или после почленного деления знаменателя на числитель

$$\begin{gathered} y_1\left[k\right] = y_1\left[k-1\right] - y_1\left[k-1\right] - \\ - \frac{m_1 g}{a_{11} - m_1 g - j\omega} y_1^*. \end{gathered} \tag{32}$$

После деления левой и правой части выражения (32) на y_1^*, оно может быть представлено следующим образом

$$\frac{y_1[k]}{y_1^*} = -\frac{m_1 g}{a_{11} - m_1 g - j\omega} \qquad (33)$$

или

$$\frac{y_1[k]}{y_1^*} = \frac{\dfrac{m_1 g}{m_1 g - a_{11}}}{\dfrac{1}{m_1 g - a_{11}} j\omega + 1}. \qquad (34)$$

Анализ зависимости (34) показывает, что она представляет собой частотную передаточную функцию апериодического звена, охваченного отрицательной обратной связью. Эта же зависимость может быть получена путем отображения передаточной функции замкнутой системы, которая описывается уравнениями (26) и (27), в частотной области.

Таким образом, корректность предложенного подхода доказана. Перейдем к исследованию замкнутых систем.

2.2 Динамическая система первого порядка с одной нелинейностью

Пусть исследуемый система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} py_1 &= a_{11} y_1 + m_1 U; \\ U &= \sqrt{\left|y_1^* - y_1\right|}\, sign\left(y_1^* - y_1\right), \end{aligned} \qquad (35)$$

т.е. представляет собой апериодическое звено, охваченное иррациональной обратной связью [7].

Систему (35) можно представить в виде нелинейного дифференциального уравнения

$$py_1 = a_{11} y_1 + m_1 \sqrt{\left|y_1^* - y_1\right|}\, sign\left(y_1^* - y_1\right). \qquad (36)$$

Необходимо отметить, что использование матричного исчисления для уравнения (36) нецелесообразно, поэтому все выкладки будем выполнять в развернутой форме.

Выполнив в уравнении (35) замену оператора Лапласа на оператор Фурье получим

$$j\omega \cdot y_1 = a_{11} y_1 + m_1 \sqrt{\left|y_1^* - y_1\right|}\, sign\left(y_1^* - y_1\right) \qquad (37)$$

или

$$\left(a_{11} - j\omega\right) y_1 + m_1 \sqrt{\left|y_1^* - y_1\right|}\, sign\left(y_1^* - y_1\right) = 0. \qquad (38)$$

Введем следующее обозначение

$$\begin{aligned} g\left(y_1, \omega\right) = \left(a_{11} - j\omega\right) y_1 + \\ + m_1 \sqrt{\left|y_1^* - y_1\right|}\, sign\left(y_1^* - y_1\right) \end{aligned} \qquad (39)$$

и определим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial g\left(y_1, \omega\right)}{\partial y_1} = a_{11} - j\omega - \frac{m_1}{2\sqrt{\left|y_1^* - y_1\right|}} - \\ - m_1 \sqrt{\left|y_1^* - y_1\right|}\, \delta\left(y_1^* - y_1\right), \end{aligned} \qquad (40)$$

где $\delta\left(y_1^* - y_1\right)$ - единичная импульсная функция.

Тогда в соответствии с выражением (22) координата y_1 может быть найдена с помощью итерационной процедуры

$$\begin{aligned} y_1[k] = y_1[k-1] - \\ - \frac{\left(a_{11} - j\omega\right) y_1[k-1] + m_1 \sqrt{\left|y_1^* - y_1[k-1]\right|}\, sign\left(y_1^* - y_1[k-1]\right)}{a_{11} - j\omega - \dfrac{m_1}{2\sqrt{\left|y_1^* - y_1[k-1]\right|}} - m_1 \sqrt{\left|y_1^* - y_1[k-1]\right|}\, \delta\left(y_1^* - y_1[k-1]\right)}. \end{aligned} \qquad (41)$$

Вычисления в соответствии с выражением (41) заканчиваются при соблюдении условия (15), которое для рассматриваемого объекта трансформируется следующим образом

$$\left|y_1[k] - y_1[k-1]\right| \le \varepsilon. \qquad (42)$$

Найденная таким образом выходная координат y_1 позволяет построить частотную передаточную функцию замкнутой нелинейной системы (35) в соответствии с выражением (25).

2.3 Динамическая система второго порядка с двумя нелинейностями

Рассмотрим замкнутую систему, которая описывается следующими уравнениями

$$py_1 = a_{12}y_2^2; \quad py_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + m_2U; \\ U = \sqrt{\left|y_1^* - y_1 - y_2\right|}\,sign\left(y_1^* - y_1 - y_2\right) \tag{43}$$

или

$$py_1 = a_{12}y_2^2; \\ py_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + m_2\sqrt{\left|y_1^* - y_1 - y_2\right|}\,sign\left(y_1^* - y_1 - y_2\right). \tag{44}$$

Выразим из первого уравнения системы (44) координату y_2

$$y_2 = \sqrt{\frac{py_1}{a_{12}}} \tag{45}$$

и подставим ее во второе уравнение

$$p\sqrt{\frac{py_1}{a_{12}}} = a_{21}y_1 + a_{22}\sqrt{\frac{py_1}{a_{12}}} + m_2\sqrt{\left|y_1^* - y_1 - \sqrt{\frac{py_1}{a_{12}}}\right|}\,sign\left(y_1^* - y_1 - \sqrt{\frac{py_1}{a_{12}}}\right). \tag{46}$$

Выполнив в уравнении (46) замену $p \to j\omega$, получим частотное характеристическое уравнение нелинейной системы (44)

$$-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\frac{(j\omega)^{1.5}}{y_1^{0.5}} + a_{21} + \frac{a_{22}}{a_{12}^{0.5}}\left(\frac{j\omega}{y_1}\right)^{0.5} + \frac{m_2\sqrt{\left|y_1^* - y_1 - \frac{1}{a_{12}^{0.5}}(j\omega y_1)^{0.5}\right|}\,sign\left(y_1^* - y_1 - \frac{1}{a_{12}^{0.5}}(j\omega y_1)^{0.5}\right)}{y_1} = 0. \tag{47}$$

или

$$-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}(j\omega)^{0.5}(j\omega - a_{22})y_1^{0.5} + a_{21}y_1 + m_2\sqrt{\left|y_1^* - y_1 - \frac{1}{a_{12}^{0.5}}(j\omega y_1)^{0.5}\right|}\,sign\left(y_1^* - y_1 - \frac{1}{a_{12}^{0.5}}(j\omega y_1)^{0.5}\right) = 0. \tag{48}$$

Для левой части уравнения (48) введем обозначение

$$g\left(y_1,\omega\right)=-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\left(j\omega\right)^{0.5}\left(j\omega-a_{22}\right)y_1^{0.5}+a_{21}y_1+$$
$$+m_2\sqrt{\left|y_1^*-y_1-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\left(j\omega y_1\right)^{0.5}\right|}sign\left(y_1^*-y_1-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\left(j\omega y_1\right)^{0.5}\right). \quad (49)$$

Дифференцируя функцию (49) по y_1, получим

$$\frac{\partial}{\partial y_1}g\left(y_1,\omega\right)=-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\frac{\left(j\omega\right)^{0.5}\left(j\omega-a_{22}\right)}{2y_1^{0.5}}+a_{21}+\frac{1}{2\sqrt{\left|y_1^*-y_1-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\left(j\omega y_1\right)^{0.5}\right|}}+$$
$$+\sqrt{\left|y_1^*-y_1-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\left(j\omega y_1\right)^{0.5}\right|}\delta\left(y_1^*-y_1-\frac{1}{a_{12}^{0.5}}\left(j\omega y_1\right)^{0.5}\right). \quad (50)$$

Для рассматриваемого объекта значение выходной координаты y_1 может быть получено из зависимости (22) после подстановки в него выражений (49) и (50). При известных значениях y_1 и y_1^* определение частотной передаточной функции осуществляется в соответствии с формулой (2).

Выводы. Анализ приведенных выкладок показывает, что любые частотные характеристики нелинейной системы могут быть определены на основании уравнений ее движения без составления аналитического выражения частотной передаточной функции. Предложенный метод позволяет определить частотное характеристическое уравнение нелинейной системы, а затем изучать ее частотные характеристики, распространяя таким образом известные частотные методы исследования линейных систем на область нелинейных систем с дифференцируемыми нелинейностями.

Список литературы

1. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой// М.: Наука, 1974, 272с.
2. С.В.Емельянов, С.К.Коровин, Л.В.Левантовский Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка/ Математическое моделирование/ М.: Наука, 2007, том 19, №1, стр.89-100.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в пяти томах. Том 1 Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления/ под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова// М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 656с.
4. Е.А. Барбашин Функции Ляпунова// М.: Наука, 1979, 240с.
5. Дж. Дэннис, мл., Р. Шнабель Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. // М.: Мир, 1988, 440с.
6. Блакьер О. Анализ нелинейных систем// М.: Мир, 1969, 400с.
7. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности// М.: Наука. Физматлит, 1997, 352 с.