

ДИСКРЕТНЫЕ ИНВАРИАНТЫ В КЛАССЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

DISCRETE INVARIANTS IN THE CLASS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR INTEGRATION

**Z. Khakimova
E. Shakhova**

Summary. The class of ordinary differential equations of the 2nd Order with multiplier right-wing parts, as well as some discrete transformation closed on this class of equations, is viewed. The article discusses the method of discrete invariants. An invariant subclass in the studied class of equations relatively to this discrete transformation is found. With the help of the concomitant, the order of the equations of the invariant subclass is reduced, while the invariant subclass of the equations is led to an easily integrated class of equations.

The authors of the article managed to find the transformation, the reverse to the concomitant, due to which they managed to calculate the general decisions of all the invariant subclasses considered in the work.

The method of discrete invariants is applied to various multiplier classes of equations, including with power right parts with arbitrary parameters, as well as to a multiplier class with functional arbitrariness.

Keywords: An ordinary differential equation (ODE), a discrete group of transformations, the exact solution of the ODE, the invariant of discrete transformation, the concomitant, the class of generalized equations of Emden-Fauler (GEFE).

Хакимова Зилия Наильевна

Кандидат физ.-мат. наук, доцент,
Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского
vka@mil.ru

Шахова Екатерина Анатольевна

Кандидат тех. наук, доцент,
Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского

Аннотация. Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с мультипликативными правыми частями, а также некоторое дискретное преобразование, замкнутое на данном классе уравнений. В статье обсуждается метод дискретных инвариантов. Ищется инвариантный подкласс в исследуемом классе уравнений относительно данного дискретного преобразования. С помощью конкомитанта понижается порядок уравнений инвариантного подкласса, при этом инвариантный подкласс уравнений приводится к легко интегрируемому классу уравнений.

Авторам статьи удалось найти преобразование, обратное конкомитанту, благодаря чему удалось вычислить общие решения всех инвариантных подклассов, рассмотренных в работе.

Метод дискретных инвариантов применён к различным мультипликативным классам уравнений, в том числе со степенными правыми частями с произвольными параметрами, а также к мультипликативному классу с функциональным произволом.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), дискретная группа преобразований, точное решение ОДУ, инвариант дискретного преобразования, конкомитант, класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ).

Введение

В рамках дискретно-группового анализа (ДГА) обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), разработанного российским математиком В. Ф. Зайцевым [1], существует два метода нахождения точных решений уравнений: 1) метод «размножения» разрешимых случаев в исследуемом классе уравнений по найденной дискретной группе преобразований; 2) метод дискретных инвариантов.

С помощью метода «размножения» научной школой В. Ф. Зайцева проинтегрированы сотни и тысячи ОДУ различных типов, решения которых представлены, например, в справочниках [1–4]. Метод «размножения» хорошо алгоритмизирован.

Метод дискретных инвариантов значительно меньше разработан. Результаты в этом направлении пока до сих пор следует рассматривать как удачу. Тем более ещё далеко до алгоритмизации этого метода.

Указанному выше методу посвящено значительно меньше работ. Этот метод представлен, например, в работах [5, 1, 6]. Недавние работы по дальнейшему развитию метода дискретных инвариантов: см., например, [7, 8].

Метод «размножения» интегрируемых случаев в исследуемых классах уравнений основан на том факте, что уравнения и их решения связаны одними и теми же преобразованиями. Если для данного класса уравнений построена дискретная группа преобразований, замкнутых в этом классе уравнений, то знание решения одного уравнения позволяет вычислить решения всех остальных уравнений, связанных преобразованиями найденной дискретной группы. Достоинство этого метода — он алгоритмизирован и даёт прогноз разрешимости тех или иных уравнений. Недостаток: необходимо знание решения хотя бы одного уравнения, соответствующего одной из вершин графа построенной дискретной группы преобразований (дуги графа соответствуют конкретным преобразованиям, замкнутым в данном классе уравнений).

Метод дискретных инвариантов, в отличие от указанного выше метода, позволяет непосредственно находить решения уравнений — без требования редукции к одному из уравнений рассматриваемого класса.

Интегрирование точных инвариантов дискретных преобразований степенного вида

Рассмотрим класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ) — класс ОДУ 2-го порядка степенного вида:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m, \quad (1)$$

имеющих множество приложений в нелинейной механике, астрофизике, химии и т.д. Будем обозначать его вектором параметров $(k, l, m | A)$.

Известно несколько дискретных преобразований [1], замкнутых в классе уравнений (1) или в его подклассах, в частности, точечное преобразование $\mathbf{s}$, замкнутое в классе уравнений

$$y''_{xx} = Ax^k y^l, (k, l, 0 | A), \quad (2)$$

который является подклассом класса уравнений (1) при $m = 0$:

$$\mathbf{s}: x \rightarrow \frac{1}{x}, y \rightarrow -\frac{y}{x},$$

$$(k, l, 0 | A) \rightarrow (-k - l - 3, l, 0 | (-1)^{l-1} A), \mathbf{s}^2 = \mathbf{E}. \quad (3)$$

Найдём точный инвариант дискретного преобразования $\mathbf{s}$ в классе уравнений (2). Для этого приравняем соответствующие элементы вектора параметров исходного и преобразованного уравнений:

$$k = -k - l - 3, l = l,$$

откуда $k = -\frac{l+3}{2}$, что соответствует точному $\mathbf{s}$ -инварианту (с точностью до коэффициента):

$$y''_{xx} = Ax^{\frac{l+3}{2}} y^l. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно переписать в виде

$$y''_{xx} = A \left(x^{-\frac{1}{2}} y \right)^l x^{-\frac{3}{2}} \text{ или } x^{\frac{3}{2}} y''_{xx} = A \left(x^{-\frac{1}{2}} y \right)^l. \quad (5)$$

Добавим неопределенный множитель «а» в левую и правую части уравнения (5):

$$ax^{\frac{3}{2}} y''_{xx} = aA \left(x^{-\frac{1}{2}} y \right)^l. \quad (6)$$

Положим:

$$T = x^{-\frac{1}{2}} y, \dot{U}_T = ax^{\frac{3}{2}} y''_{xx}. \quad (7)$$

Поскольку

$$U'_x = T'_x \dot{U}_T = \frac{a}{2} (2xy'_x - y) y''_{xx}. \quad (8)$$

Интегрируя (8), получаем

$$U = \frac{a}{2} y'_x (xy'_x - y).$$

Пусть $a = 2$. С помощью преобразования

$$T = x^{-\frac{1}{2}} y, U = y'_x (xy'_x - y), \quad (9)$$

называемого конкомитантом — согласованным инвариантом дискретного преобразования (в данном случае $\mathbf{s}$ -инвариантом), уравнение (6) перейдёт в уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными:

$$\dot{U}_T = 2AT^l. \quad (10)$$

Замечание 1. Функция U является точным $\mathbf{s}$ -инвариантом, а функция T — $\mathbf{s}$ -инвариантом с точностью до знака.

Общее решение уравнения (10) при $l \neq -1$:

$$U(T) = \frac{2A}{l+1} T^{l+1} + C_2. \quad (11)$$

Найдём преобразование, обратное к конкомитанту (9), рассматривая (9) как систему уравнений относительно x и y :

$$x = C_1^2 e^{2 \int \frac{dT}{\pm \sqrt{T^2 + 4U}}}, y = C_1 T e^{\int \frac{dT}{\pm \sqrt{T^2 + 4U}}}. \quad (12)$$

Если подставить (11) в (12), то получим общее решение $\mathbf{s}$ -инвариантного уравнения (4).

Более общий класс степенных уравнений

Рассмотрим более общий, чем (1), класс степенных уравнений, введя в правую часть множитель $(y'_x - y)^n$:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^n, \quad (13)$$

который при $n = 0$ содержит класс ОУЭФ (1). Будем обозначать этот класс уравнений $(k, l, m, n | A)$.

Замечание 2. Основанием для этого шага может служить то, что указанную скобку содержит функция U в конкомитанте (9).

Как оказалось [9, 10], преобразование $\mathbf{s}$, не замкнутое во всём классе уравнений (1), является замкнутым в (13):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}: x &\rightarrow \frac{1}{x}, y \rightarrow -\frac{y}{x}, \\ (k, l, m, n | A) &\rightarrow (-k - l - 3, l, m, n | (-1)^{l-1} A), \\ \mathbf{s}^2 &= \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично предыдущему пункту, приравняем показатели соответствующих степеней:

$$k = -k - l - 3, l = l, m = n.$$

Таким образом, получается $\mathbf{s}$ -инвариантное уравнение (с точностью до коэффициента A):

$$y''_{xx} = Ax^{\frac{l+3}{2}} y^l (y'_x)^m (xy'_x - y)^m$$

или $\left(-\frac{l+3}{2}, l, m, m | (-1)^{l-1} A\right). \quad (15)$

Перепишем (15) следующим образом:

$$x^{\frac{3}{2}} y''_{xx} = A \left(x^{-\frac{1}{2}} y\right)^l \left[y'_x (xy'_x - y)\right]^m. \quad (16)$$

Уравнение (16) с помощью того же конкомитанта (9) приводится к уравнению 1-го порядка

$$\dot{U}_T = 2AT^l U^m,$$

общее решение которого при $l \neq -1, m \neq 1$:

$$U(T) = \left[\frac{2(1-m)}{l+1} AT^{l+1} + C_2 \right]^{\frac{1}{1-m}}. \quad (17)$$

Композиция (12) и (17) является общим решением $\mathbf{s}$ -инвариантного уравнения (16).

Интегрирование инварианта с произвольными функциями

Рассмотрим мультипликативное $\mathbf{s}$ -инвариантное уравнение:

$$x^{\frac{3}{2}} y''_{xx} = f\left(x^{-\frac{1}{2}} y\right) g\left[y'_x (xy'_x - y)\right], \quad (18)$$

подклассами которого являются класс ОУЭФ (1) при $f(\alpha) = A\alpha^l, g(\beta) = 1$, и степенной класс уравнений (4) при $f(\alpha) = A\alpha^l, g(\beta) = \beta^n$.

С помощью конкомитанта (9) можно понизить порядок уравнения (18):

$$\dot{U}_T = 2f(T)g(U). \quad (19)$$

Общее решение уравнения (19):

$$U = G^{-1}(F(T)), F(T) = 2 \int f(T) dT + C_2,$$

$$G(Z) = \int \frac{dZ}{g(Z)} \quad (20)$$

(G^{-1} означает обратную функцию).

Композиция (12) и (20) является общим решением уравнения (18).

Заключение

В данной статье проинтегрированы точные $\mathbf{s}$ -инвариантные классы уравнений степенного вида с одним или двумя параметрами, а также $\mathbf{s}$ -инварианты с двухфункциональным произволом мультипликативного вида.

Интегрируемость некоторых из рассмотренных классов уравнений была обнаружена раньше [6]. В данной работе выписаны точные общие решения всех $\mathbf{s}$ -инвариантных классов уравнений в удобном виде, благодаря тому, что одному из авторов статьи удалось найти преобразование (12), обратное к конкомитанту (9).

К дальнейшим перспективам можно отнести рассмотрение инвариантов других дискретных преобразований (в работах [7, 8] уже были рассмотрены инварианты другого дискретного преобразования: $x \rightleftharpoons y$).

Также в перспективе можно рассмотреть ОДУ других типов; кроме ОДУ 2-го порядка можно рассмотреть ОДУ более высокого порядка — например, 3-го.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин — М.: Наука, 1993. — 464 с.
2. Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. — CRC Press, Boca Raton—New York, 2003.
3. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. — CRC Press. Boca Raton — London, 2018. — 1496 p. DOI: 10.1201/9781315117638
4. Зайцев В.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: справочник для вузов [Электронный ресурс] / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2024. — 385 с. — URL: <https://urait.ru/bcode/537987> (дата обращения: 06.06.2024)

5. Аржанникова И.Ю. Современный групповой анализ: методы и приложения / И.Ю. Аржанникова, В.Ф. Зайцев, А.А. Малых, В.В. Попов, А. Перес Лопес, Е.Г. Фалилеева, А.В. Флегонтов, З.Н. Хакимова. — Л.: Препринт ЛИИА АН СССР, 1989. — №107. — 58 с.
6. Хакимова З.Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го порядка / З. Н. Хакимова // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, 2014 — С. 57–62.
7. Хакимова З.Н. Симметрии и интегрирование уравнений орбиты одного дискретно-инвариантного дифференциального уравнения второго порядка степенного вида / З.Н. Хакимова, М.А. Лисицына // Перспективы науки. — Тамбов: ТМБпринт. — 2024. — № 8 (179). — С. 51–55.
8. Хакимова З.Н. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью инвариантов дискретных преобразований [Электронный ресурс] / З.Н. Хакимова, А.А. Атоян // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2024. — N 3. — С. 123–133. — URL: <https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2024.3/article.1.8.html> (дата обращения: 13.12.2024)
9. Хакимова З.Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Актуальные вопросы современной науки, №3. — СПб., 2014. — С. 3–11.
10. Хакимова З.Н. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — N 1(4). — С. 61–92. — URL: <https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4> (дата обращения: 20.05.2021)

© Хакимова Зилия Наильевна (vka@mail.ru); Шахова Екатерина Анатольевна
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»