

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВЕЙВЛЕТ

Мухидинова Наргис Шухратовна

аспирант, Санкт-петербургский политехнический
университет Петра Великого
nargismu@yandex.ru

ANALYSIS OF THE ACCURACY OF THE FOURIER TRANSFORM AND WAVELET TRANSFORM

N. Mukhidinova

Summary: The article is devoted to the investigation of the accuracy of methods characterizing the processes of cerebral blood flow autoregulation for methodological support of measuring systems in the field of digital personalized medicine. Impaired autoregulation of cerebral blood flow (ARMC) is one of the leading links in the pathogenesis of cerebral hemodynamic disorders. The development of an intelligent system for diagnosing this protective mechanism of the brain is an urgent task. The numerical method of processing the signals of the system arterial pressure and blood flow velocity in the middle cerebral arteries, which characterize the autoregulation of cerebral blood flow, allows us to determine the nature of cerebral autoregulation disorders. We analyzed the dependence of the parameters of the analyzed signals on the accuracy of autoregulation estimation by means of continuous wavelet and Fourier transforms.

Keywords: Fourier analysis, wavelet analysis, cerebral circulation, Mayer waves.

Аннотация. Статья посвящена исследованию точности методов, характеризующих процессы ауторегуляции мозгового кровотока, для методической поддержки измерительных систем в области цифровой персонализированной медицины. Нарушение ауторегуляции мозгового кровотока (АРМК) является одним из ведущих звеньев в патогенезе расстройств церебральной гемодинамики. Разработка интеллектуальной системы для диагностики данного защитного механизма мозга является актуальной задачей. Численный метод обработки сигналов системного артериального давления и скорости кровотока в средних мозговых артериях, характеризующих ауторегуляцию мозгового кровотока, позволяет определить характер нарушения процессов церебральной ауторегуляции. В работе анализировалась зависимость параметров анализируемых сигналов на точность оценки ауторегуляции посредством непрерывного вейвлет преобразования и Фурье преобразования.

Ключевые слова: анализ Фурье, вейвлет-анализ, мозговое кровообращение, волны Майера.

Введение

Внедрение инновационных технологий, способствующих развитию здравоохранению, является одной из главных задач современного развитого общества. В рамках разработанной общей концепции и принципов построения киберфизических систем в медицинской отрасли как единой технологической платформы, интегрирующей новые технологии, основанной на накоплении данных, требуется создание новых методов обработки данных медицинских исследований и создание на их основе медицинских информационно-измерительных систем и технологий. Централизация оцифрованных данных, использование методов искусственного интеллекта и машинного обучения для извлечения важной диагностической и прогностической информации, организация дистанционного мониторинга здоровья и многие другие важные задачи стоят для достижения цифровизации медицины. Технология диагностики ауторегуляции мозгового кровообращения является элементом технологической платформы цифровой медицины.

Одним из наиболее информативных показателей для оценки АРМК является сдвиг фаз между колебаниями САД и ЛСК в М-диапазоне волн 0.080–0.120 Гц. Сложность вычисления данного параметра состоит в том, что

полезный сигнал, характеризующий ауторегуляцию, наблюдается в смеси с другими физиологическими сигналами. Для решения данной проблемы, было проведено исследование на основе данных, приближенных к параметрам медицинских сигналов ЛСК и АД при оценке АРМК.

Цель исследования — проанализировать точность оценки нарушения ауторегуляции посредством методов вейвлет анализа и Фурье преобразования.

Методы исследования

Для анализа влияния параметров анализируемых сигналов (ЛСК и АД) на оценку АРМК были выполнены эксперименты на основе смоделированных синусоид, переменных во времени с частотами 0.08 и 0.125 Гц, к которым были добавлены шумовые составляющие (белый гауссовский шум). Условия проведения экспериментов и параметры анализируемых сигналов приближены к медицинским сигналам.

Дискретизация сигналов осуществлялась с периодом 0,01 с, сдвиг фаз синусоид $\pi/3$ и $\pi/2$ на частотах 80 и 125 мГц соответственно. Длина сигналов 400 секунд выбиралась исходя из средней длительности данных

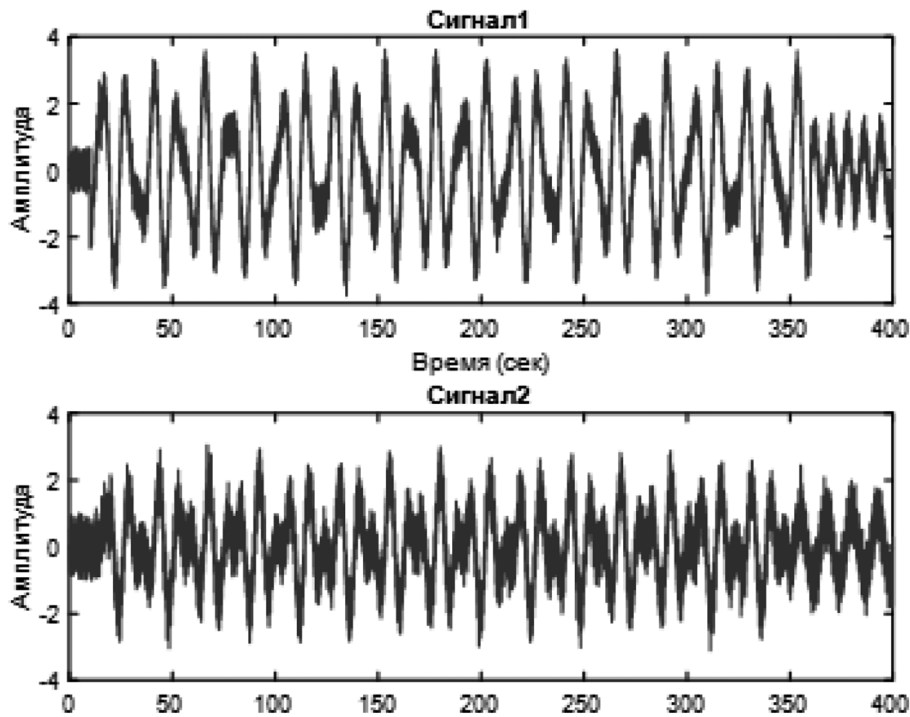


Рис. 1. Анализируемые сигналы

ЛСК и АД. Фазовые сдвиги в обоих методах находились при когерентности выше 0.7. Анализируемые сигналы представлены на рисунке 1.

Непрерывное вейвлет преобразование

Идея непрерывного вейвлет-преобразования (НВП) заключается в использовании вейвлета в качестве полосового фильтра. НВП сигнала $x(t)$ определяется как свертка с масштабированным и нормализованным вейвлетом.

$$\hat{X}(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt; \quad (1)$$

где $\psi(\cdot)$ означает комплексное сопряжение, $\frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ — нормализованная вейвлет-функция, параметр b которой соответствует временному сдвигу, а параметр $a > 0$ задает масштабирование.

После замены интеграла суммой для дискретных расчетов $n = \frac{t}{\delta t}$, мы получаем соотношение для коэффициентов вейвлет-преобразования:

$$\hat{X}(s, n) = \sum_{n'=0}^{N-1} x(n) \psi\left(\frac{(n-n')\delta t}{s}\right) \quad (2)$$

По теореме о свертке вейвлет-коэффициенты могут быть более эффективно вычислены в виде обратного преобразования Фурье от произведения Фурье-обра-

зов сигнала и вейвлет-коэффициентов в соответствии с формулой:

$$\hat{X}(s, n) = x(n) * \psi(n) = F^{-1}\left[F(x(n)) \cdot F(\psi(n, s))\right]$$

где F — оператор дискретного преобразования Фурье, s — номер шкалы вейвлет — преобразования.

В качестве базиса рассмотрены неортогональные вейвлеты, которые эффективны для анализа временных рядов и аperiodических сдвигов: комплексный вейвлет Морле, комплексный вейвлет Поула и вещественный вейвлет, представляющий разность Гауссианов (DOG) [16, 17]. Эти вейвлет-базисы хорошо локализованы как по частоте, так и по времени. Предварительные расчеты показали, что все вейвлет-базисы дают неплохие результаты, но несколько лучшие результаты получаются с использованием вейвлета Морле

Алгоритм для вычисления когерентности и фазового сдвига сигналов посредством НВП, которое применяется к двум дискретным центрированным сигналам $x_n = \xi_n - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n$ и $y_n = \zeta_n - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_n$, измеренным с использованием оптических датчиков. Вычисление применяется к фреймам данных длиной: $N = 2^{\text{floor}(\log_2(N'))+1}$, где N' — первоначальная длина фрейма анализируемых сигналов.

Для каждого фрейма сигналов x_n и y_n выполнено дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$\hat{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn}, \hat{y}_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-i2\pi kn}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ обозначает индекс частоты.

Параметры вейвлет-разложения, такие как минимальный масштаб s_0 , максимальный уровень J разложения, конкретные уровни разложения $j = 0, 1, \dots, J$ и вектор масштабов s_j определяются по формулам:

$$\begin{aligned} s_0 &= 2\delta t, \\ J &= \delta j^{-1} \log_2 \left(\frac{N\delta t}{s_0} \right), \\ s_j &= s_0 2^{j\delta j}. \end{aligned}$$

На каждой шкале выполняется нормализация вейвлет-коэффициентов по формуле:

$$\hat{\psi}(s\omega_k) = \sqrt{\frac{2\pi s}{\delta t}} \hat{\psi}_0(s\omega_k).$$

Поэлементное умножение Фурье-образа анализируемого сигнала и Фурье-образов вейвлетов на каждом уровне разложения и последующее обратное преобразование Фурье полученного произведения позволяет получить коэффициенты вейвлет-разложения сигналов x_n и y_n

$$\begin{aligned} c_x(n, s) &= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{\psi}(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}, \\ c_y(n, s) &= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_k \hat{\psi}(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}. \end{aligned}$$

Когерентность или согласованность двух сигналов может быть определена как модуль нормализованного кросс-спектра. Когерентность определяет линейную связь между двумя сигналами. Величина когерентности варьируется от нуля до единицы. Квадрат нормированного значения когерентности определяется по формуле:

$$H_{x,y}^2(n, s) = \frac{[c_x(n, s) c_y(n, s)]^2}{[c_x(n, s)]^2 [c_y(n, s)]^2}.$$

Фазовый сдвиг кросс-спектра вейвлета может быть получен по следующей формуле:

$$\theta_{x,y}(n, s) = \arctg \frac{\Im(c_{x,y}(n, s))}{\Re(c_{x,y}(n, s))}.$$

Кратковременное Фурье преобразование (КФП)

Традиционный анализ выполняют в частотной области на основе преобразования Фурье, при этом предполагается, что сигналы локально стационарны [18, 19]. При спектральных измерениях случайных сигналов

основной целью является определение спектральной плотности мощности (СПМ). Прямой метод определения СПМ случайных последовательностей основан на вычислении квадрата модуля ДПФ отдельных участков последовательности данных с использованием соответствующего статистического усреднения. Этот метод получил название метода периодограмм [20].

Для нестационарных сигналов обычно применяют оконное преобразование Фурье. Размер окна выбран таким образом, чтобы получить достаточную точность разложения сигнала в области M — волн. Так как на анализируемые сигналы был наложен шум, было выполнено их сглаживание. Существуют несколько подходов к процедуре усреднения, но наиболее удачным из них считается метод периодограммы Уэлча, при котором используются оконные функции и перекрывающиеся сегменты.

Согласно данному методу, перед вычислением спектральных плотностей сигналов вычислялись по следующему алгоритму. Из дискретной последовательности формируется несколько сегментов. Исходные сигналы разбиваются на N_{avg} перекрывающихся сегментов с определённым сдвигом N_{shift} , каждый из сегментов содержит количество отсчётов $N_{overlap}$:

$$\begin{aligned} x^{(p)}(n) &= \bar{x} + win(n, N_{overlap}) \cdot (\bar{x} - x(n + pN_{shift})), \\ 0 \leq n &\leq N_{overlap} - 1, 0 \leq p \leq N_{avg} - 1 \end{aligned}$$

где $win(n, N_{overlap})$ — скользящее окно, $\bar{x}$ — среднее значение последовательности $x(0) \dots x(N-1)$, $p = 0, 1, \dots, P-1$, P — число сегментов.

Далее выбирается оконная функция и производятся вычисления по формулам:

$$\overline{P_{xx}^{(p)}} = \left| \Delta t \sum_{m=0}^{N_{overlap}-1} x^{(p)}(m) \cdot \exp(-2i\pi f m \Delta t) \right|^2 \frac{1}{U \cdot N_{overlap} \Delta t}$$

где U — энергия окна:

$$U = \Delta t \sum_{m=0}^{N_{overlap}-1} win^2(m, N_{overlap})$$

И выполняется усреднение результатов, полученных для нескольких сегментов, с целью уменьшения дисперсии:

$$P_{win}(f) = \frac{1}{N_{avg}} \sum_{p=0}^{N_{avg}-1} \overline{P_{xx}^{(p)}}(f)$$

Величина перекрытия соседних сегментов выбиралась в зависимости от вида окна. Количество отсчётов для ДПФ подбиралось в зависимости от разрешения частоты. Соответственно анализу при оценке церебральной ауторегуляции были выбраны аналогичные параметры: размер скользящего окна, смещение подбирались

в зависимости от типа окна, количество отсчетов в окне подбирались в зависимости от интересующего диапазона частот 80–125 МГц.

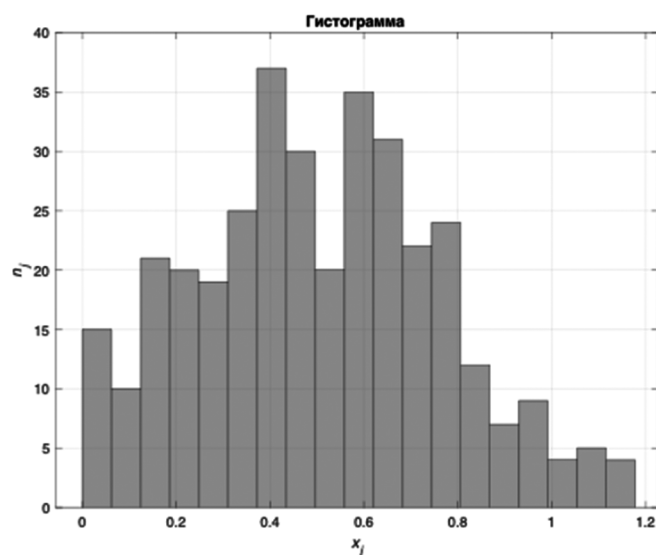
Результаты эксперимента

Для учёта случайной погрешности были проведены 350 испытаний. На изображении 2 представлена гистограмма ошибок проведенных испытаний. При использовании КФП фазовые сдвиги находились по максимальной когерентности (рис. 3). Были рассмотрены основные типы окон: прямоугольное, Хэмминга, Ханна, Гауссово. Фазовые сдвиги, вычисленные по максимальной когерентности посредством прямоугольного окна были наиболее близки к исходным значениям (2.a и 2.b).

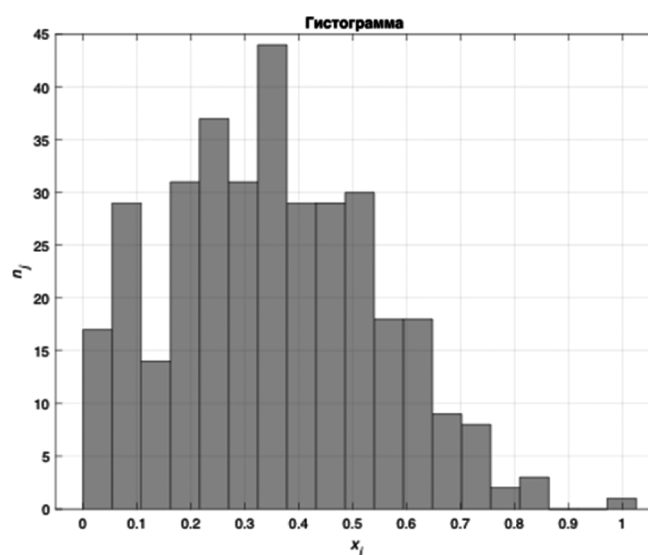
При анализе фазового сдвига посредством вейвлет преобразования учитывали границы конуса влияния при анализе относительной погрешности. Для уменьшения эффекта краевых границ рассматривались данные после 30 секунд (рис. 4). По представленным данным (рис. 2) видно, что погрешность фазовых сдвигов при НВП меньше, чем при КФП.

Так же было выявлено, что обнаружения начала и конца фазовых сдвигов посредством НВП более точное (рис. 5).

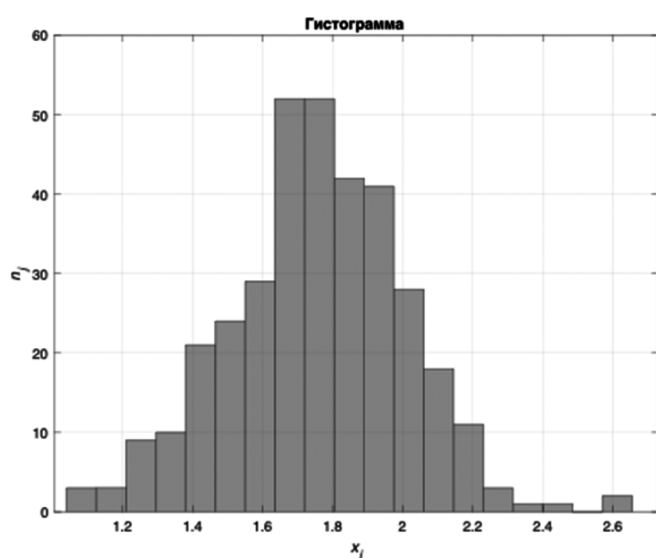
На рисунке 5 начало t_1 и конец t_2 фазового сдвига у исходного сигнала отмечены красными линиями на частоте 80 МГц $t_1 = 50$ сек., $t_2 = 185$ сек.; на частоте 125 МГц $t_1 = 200$ сек., $t_2 = 300$ сек.



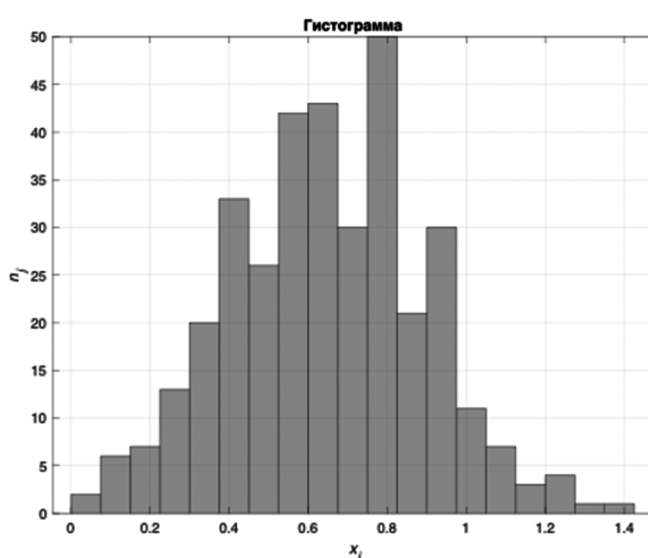
1. а



1. б



2. а



2. б

Рис. 2. Погрешность полученных данных

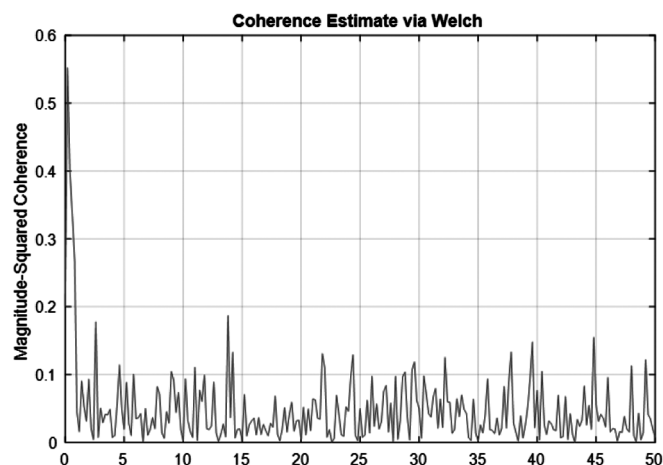


Рис. 3. Когерентность сигналов

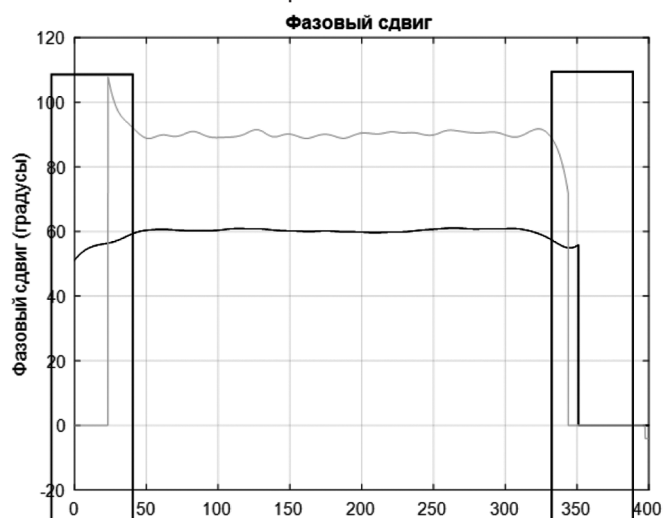


Рис. 4. Краевой эффект

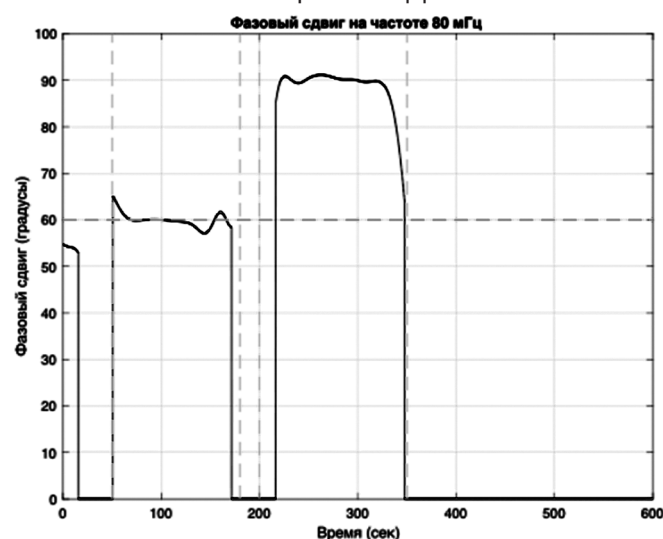


Рис. 5. Результат обработки сигналов посредством НВП

Таблица 1.

Результаты фазовых сдвигов в зависимости
от длины сигнала

Длина сигнала (сек)	НВП		КОП	
	Фазовый сдвиг			
	80 мГц	125 мГц	80 мГц	125 мГц
10	69	102	66	81
20	63,06	90,1	59,29	89,85
30	61,21	91,81	61,87	82,88
40	61,18	89,39	63,17	82,68
50	60,11	91,47	58,74	87,11
70	60,55	89,91	59,98	86,13
100	60,77	89,36	59,58	88,37
150	61,52	87,76	59,80	87,00
200	61,93	90,39	59,58	87,17

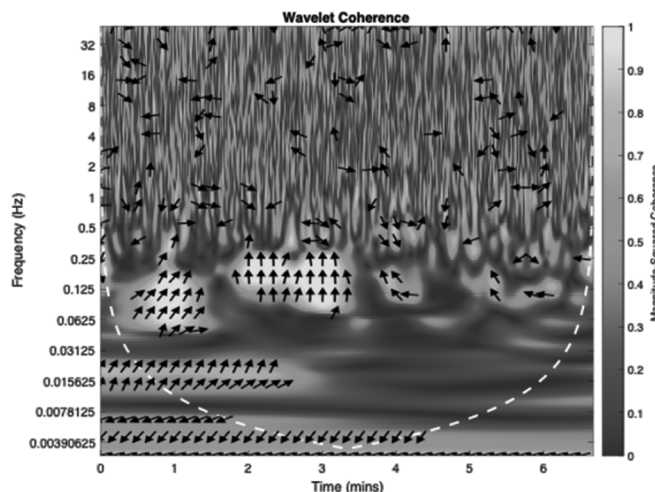


Рис. 6. Вейвлет преобразование

Также было проведено исследование зависимости точности нахождения фазовых сдвигов от длины сигнала посредством данных методов. Длина одного из сигналов всегда была 300 секунд, второго (смещенного по фазе) — переменная. Было обнаружено, что при перекрытии сигналов на частоте 125 мГц 90 секунд, на частоте 80 мГц 50 секунд Фурье преобразование не находит искомые фазовые сдвиги в отличие от вейвлет преобразования (рис. 6). Средние ошибки обнаружения фазового сдвига при вейвлет преобразовании 2.6 % и 0.2 % на частотах 125 и 80 мГц соответственно (средние фазовые сдвиги 87,62 и 60,1). При длительности сигнала более 200 секунд Фурье преобразование обнаруживает искомые фазовые сдвиги с наименьшей точностью. При длине сигнала менее 50 секунд когерентность анализируемых сигналов менее 0.7 (примерно 0.34).

Заключение

Полученные результаты экспериментов доказывают, что погрешность обнаружения фазовых сдвигов намного меньше при вейвлет преобразовании в сравнении

с Фурье преобразованием. Обнаружение начала и конца фазовых сдвигов посредством вейвлет анализа также является более точным, что свидетельствуют представленные данные. Данный метод даёт большее разрешение в частотной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко — СПб.: Питер, 2003. — 604 с.
2. Aaslid, R., Lindegaard, K.F., Sorteberg, W., Nornes, H.: Cerebral autoregulation dynamics in humans. *Stroke*. 20, (1989). <https://doi.org/10.1161/01.STR.20.1.45>.
3. Zhang, R., Zuckerman, J.H., Giller, C.A., Levine, B.D.: Transfer function analysis of dynamic cerebral autoregulation in humans. *Am. J. Physiol. — Hear. Circ. Physiol.* 274, (1998). <https://doi.org/10.1152/ajpheart.1998.274.1.h233>.
4. Semenyutin, V.B., Asaturyan, G.A., Nikiforova, A.A., Aliev, V.A., Panutsev, G.K., Iblyaminov, V.B., Savello, A. V., Patzak, A.: Predictive value of dynamic cerebral autoregulation assessment in surgical management of patients with high-grade carotid artery stenosis. *Front. Physiol.* 8, (2017). <https://doi.org/10.3389/fphys.2017.00872>.
5. Aliev, V., Semenyutin, V., Panutsev, G.: Predictive Value of Cerebrovascular Reserve in Patients with Carotid Artery Stenosis for Choosing Treatment Strategy. *Int. J. Pathol. Clin. Res.* 5, (2019). <https://doi.org/10.23937/2469-5807/1510086>.
6. Semenyutin, V., Aliev, V., Panutsev, G., Patzak, A.: Perioperative Dynamics of Intracranial B-waves of Blood Flow Velocity in the Basal Cerebral Arteries in Patients with Brain Arteriovenous Malformation. In: *Acta Neurochirurgica, Supplementum* (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-59436-7_14.
7. Semenyutin, V.B., Aliev, V.A., Bersnev, V.P., Patzak, A., Panutsev, G.K., Nikiforova, A.A., Ramazanov, S.S., Pechiborsch, D.A., Iblyaminov, V.B., Asaturyan, G.A., Dudanov, I.I., Pavlov, O.A.: Diagnostic and prognostic potential of non-invasive assessment of cerebral blood flow autoregulation. *Reg. blood Circ. Microcirc.* 14, (2015). <https://doi.org/10.24884/1682-6655-2015-14-1-4-14>.
8. Yi, H., Xin, S.Y., Yin, J.F.: A class of algorithms for continuous wavelet transform based on the circulant matrix. *Algorithms*. 11, (2018). <https://doi.org/10.3390/a11030024>.
9. Torrence, C., Compo, G.P.: A Practical Guide to Wavelet Analysis. *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 79, (1998). [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079<02.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<02.0.CO;2).
10. Malykhina, G.F., Merkusheva, A.V.: Classes of transformations of a non-stationary signal in information-measuring systems. VI. Correspondence of the form of covariance and the type of time-frequency transformation... *Sci. instrumentation*. 17, 75–87 (2007).
11. Merkusheva, A.V., Malykhina, G.F.: The generalized Fourier transform method for timefrequency transformations, multiplexing and filtering of non-stationary signals in information systems. *Sci. Instrum.* 16, 85–96 (2006).
12. Malykhina, G.F., Merkusheva, A.V.: Metrological aspects of non-stationary signal transformation for dynamic spectrum analysis. In: *10th IMEKO TC7 Symposium on Advances of Measurement Science 2004* (2004).
13. Mallat, S.: *A Wavelet Tour of Signal Processing*. (2009). <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374370-1.X0001-8>. 13. Daubechies, I.: *Ten Lectures on Wavelets*. (1992). <https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>.
14. Pérez-Rendón, A.F., Robles, R.: The convolution theorem for the continuous wavelet transform. *Signal Processing*. 84, (2004). <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2003.07.014>.
15. Malykhina, G., Salnikov, V., Semenyutin, V., Tarkhov, D.: Digitalization of medical services for detecting violations of cerebrovascular regulation based on a neural network signal analysis algorithm. In: *ACM International Conference Proceeding Series* (2020). <https://doi.org/10.1145/3444465.3444526>.
16. Bassani T., Cesar Nievola J. Brain-computer interface using wavelet transformation and naïve bayes classifier. // *Advances in Experimental Medicine and Biology*. — 2010. https://doi.org/10.1007/978-0-387-79100-5_8.
17. Birch A.A., Dirnhuber M.J.F.R.C.A., Hartley-Davies R., Iannotti F., NeilDwyer G. Assessment of autoregulation by means of periodic changes in blood pressure. // *Stroke*. — 1995. — Vol. 26. <https://doi.org/10.1161/01.STR.26.5.834>.
18. Sejdić E.; Djurović I.; Jiang J. Time-frequency feature representation using energy concentration: An overview of recent advances. // *Digital Signal Processing*. — 2009. — Vol. 19 (1). — Pp. 153–183. doi:10.1016/j.dsp.2007.12.004.
19. Jacobsen E., Lyons R. The sliding DFT. // *Signal Processing Magazine*. — Vol. 20, issue 2. — Pp. 74–80 (March 2003).
20. Марпл. — мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.

© Мухидинова Наргис Шухратовна (nargismu@yandex.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»