

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ВОЛНЫ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ХИЩНИК-ХИЩНИК»

THEORETICAL BASIS OF THE METHOD OF THE WAVE PROBABILITY FOR THE ECOLOGICAL SYSTEM OF "PREDATOR — PREDATOR"

**D. Zaitsev
O. Shamaeva
N. Shvedov**

Summary. The method of the wave probability for the ecological system of "predator — predator" is given in this work. The concepts from the theory of games and queueing theory are used for discrete description of the system of "predator — predator". The idea of the method is the following: the calculation of the probability of the graph states is similar to the calculation of the wave front of the wave according to Huygens — Fresnel's principle. The method is based on creating of the graph. Each state of this graph is characterized by the number of two kinds of predators. Some restrictions which is necessary to consider creating the models of "predator — predator" with the help of the queueing theory are given.

Keywords: Ecological system, the method of the wave probability, the graph, Markov's process, the queueing theory.

Зайцев Дмитрий Викторович

К.т.н., доцент, 12 Центральный научно-исследовательский институт Министерства обороны Российской Федерации, Россия, Сергиев Посад-7

Шамаева Ольга Юрьевна

К.т.н., доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия, Москва

Шведов Николай Александрович

*Аспирант, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия, Москва
Shvedovn@gmail.com*

Аннотация. в работе предложен метод волны вероятности для экологической системы «хищник-хищник». Для дискретного описания динамики системы «хищник-хищник» используются понятия из теории игр, теории графов и теории систем массового обслуживания. Идея метода заключается в том, что расчет вероятностей состояний графа аналогичен расчету волнового фронта волны на основе принципа Гюйгенса — Френеля. Метод основан на построении графа, каждое состояние которого характеризует численности хищников двух видов. Приведены некоторые ограничения, которые надо учитывать при создании модели «хищник — хищник», изменяя теорию систем массового обслуживания.

Ключевые слова: экологическая система, метод волны вероятности, граф, теория систем массового обслуживания, марковский процесс.

Введение

Современное общество уделяет большое внимание экологическим проблемам [1]. Среди множества направлений в экологии существует направление изучающее взаимодействие популяций в разных экологических системах. Известны различные методы моделирования экологических систем: аналитические, имитационные, стохастические [2]. Все они имеют ряд существенных недостатков. Аналитические методы не учитывают возможности случайных событий, имеют единственное решение, которое не дает никакой информации о существовании других решений и их вероятностях. Имитационные методы требуют многократности повторения процесса расчета, значительного объема памяти и времени. Стохастические методы применимы только для игр малого масштаба. Поэтому необходимо создать новый метод, характеризующийся простотой вычислений. Целью данной работы является создание такого метода для экологической системы «хищник —

хищник». В отличие от известных методов предложенный метод не требует решения системы связанных дифференциальных уравнений Колмогорова, а использует итерационные зависимости.

1. Описание экологической системы «хищник — хищник»

Одним из частных случаев экологической системы «хищник — жертва» является экологическая система «хищник — хищник». Она описывает конкурентную борьбу двух видов хищников на одной территории или борьбу за один общий вид ресурсов. Отличительной особенностью этой системы является то, что данные виды хищников — антагонисты.

Суть данного противостояния интересов можно наблюдать не только в экологическом аспекте, но и в социальной сфере, — в конфликтах малой интенсивности (например, противоборство силовиков и террористов).

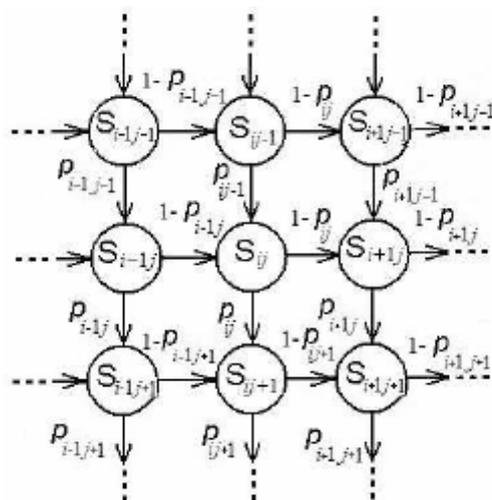


Рис. 1. Фрагмент графа экологической системы «хищник — хищник»

Также можно провести параллель с задачами, решаемыми в рамках теории игр, где у игроков антагонистические интересы [3, 4].

Математическая модель экологической системы «хищник — хищник» представляется в виде конечного графа с дискретными состояниями и дискретным временем, отображающим конкретное количество двух антагонистических видов хищников в определенный момент времени [5]. Переходы между состояниями однонаправленные, то есть, нет «петель». Под понятием «петля» будем подразумевать возможность обратного перехода, то есть, из текущего состояния системы можно сделать переход в предыдущее состояние, в котором уже побывала экологическая система.

В данном графе есть «поглощающие состояния». «Поглощающими состояниями» будем называть все состояния, в которых число одного из двух видов хищников равно нулю. Это будет означать, что один из видов хищников одержал победу над другим и ему досталась территория или общий ресурс.

2. Описание метода волны вероятности для системы «хищник- хищник»

Метод волны вероятности заключается в рассмотрении распространения в графе волны вероятности, волновой фронт которой можно рассчитать с помощью принципа, аналогичного принципу Гюйгенса — Френеля для расчета дифракции оптического излучения [6].

Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторич-

ных волн, а огибающая этих волн задает положение волнового фронта в следующий момент времени.

Для расчета вероятности $P_{i,j}$ состояния $S_{i,j}$ необходимо просуммировать вероятности переходов $p_{i,j-1}$ и $(1 - p_{i-1,j})$ из соседних состояний $S_{i-1,j}$ и $S_{i,j-1}$ с соответствующими вероятностными состояниями $P_{i,j-1}$ и $P_{i-1,j}$. Где $S_{i,j}$ — состояния, отображающие i — ое количество хищников одного вида и j — ое количество хищников другого вида.

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} p_{i,j-1} + P_{i-1,j} (1 - p_{i-1,j}) \quad \text{— формула волны вероятности ...} \quad (2.1)$$

На рисунке 1 представлен фрагмент графа экологической системы «хищник — хищник».

Вышеуказанный граф получается, используя теорию систем массового обслуживания и марковские процессы.

Процесс, протекающий в физической системе, называется марковским, если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [7].

Применение теории систем массового обслуживания предполагает использование некоторых ограничений при создании модели:

- ◆ одновременно не может произойти более одного события (гибель хищника одного или другого вида);
- ◆ процесс возникновения событий подчиняется пуассоновскому закону;

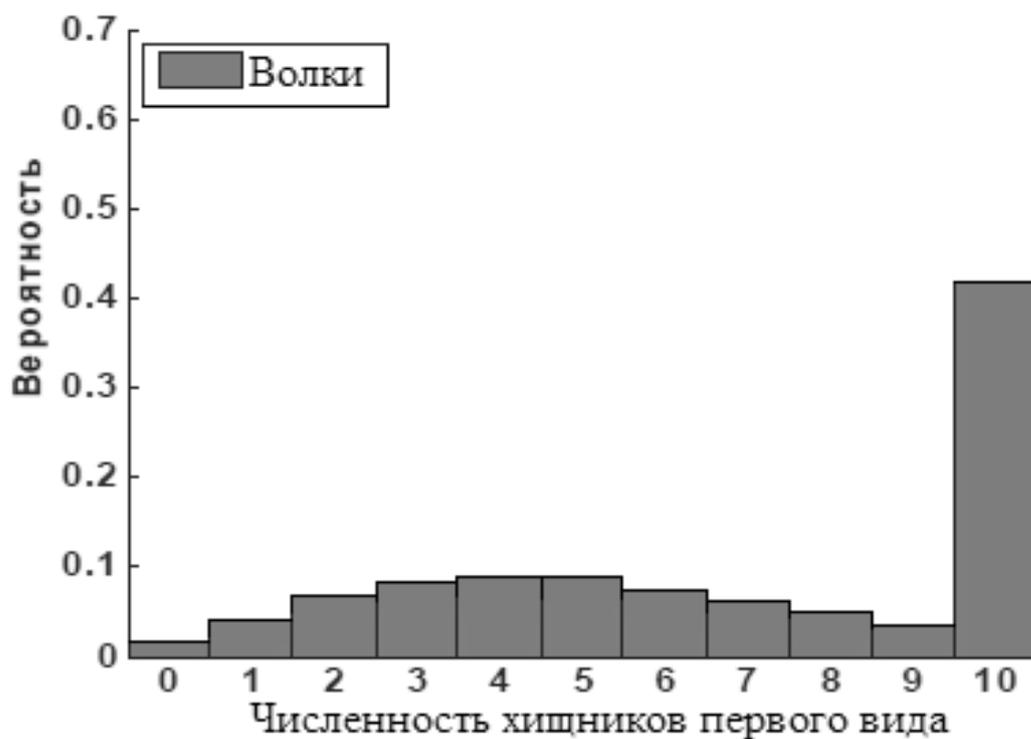


Рис. 2. Распределение вероятностей для волков

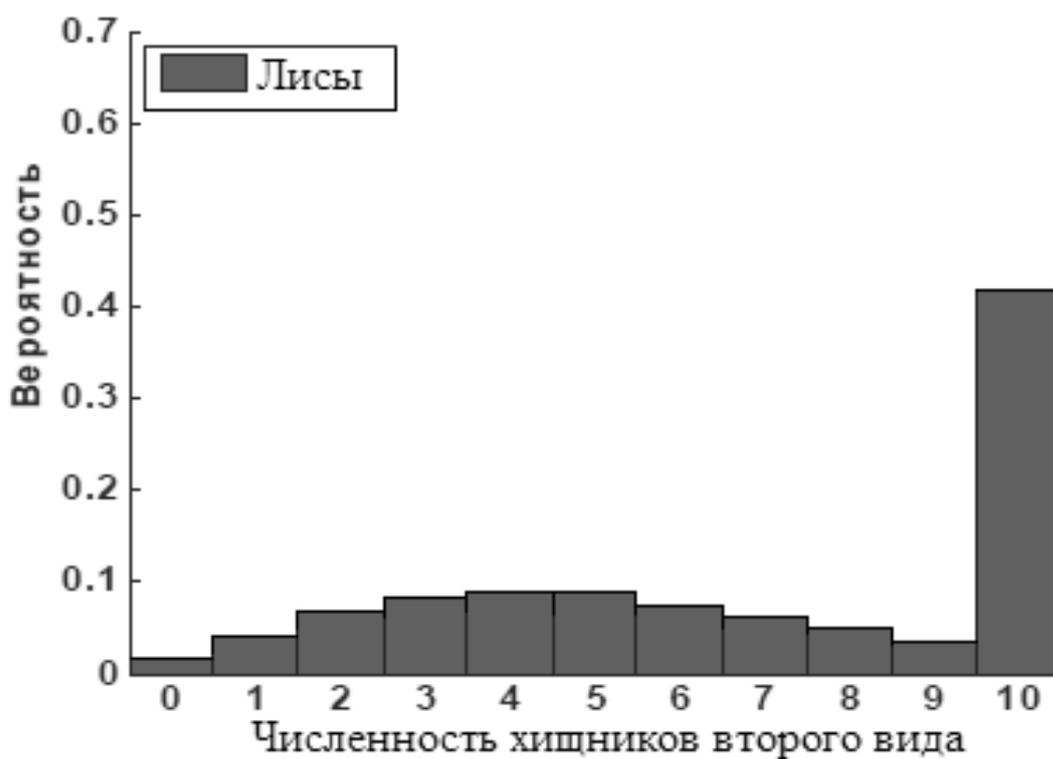


Рис. 3. Распределение вероятностей для лис

- ♦ система может находиться в одном из состояний $S_{i,j}$
- ♦ вероятности перехода в новые состояния зависят только от того состояния, в котором в данный момент находится система [8].

Поток событий называется пуассоновским (простейшим), если он обладает тремя свойствами: стационарен, однороден и не имеет последствий [9].

Это предположение позволяет представить экологическую систему «хищник — хищник» в виде графа системы массового обслуживания.

3. Использование метода волны вероятности для экологической системы «хищник — хищник» при решении задач теории систем массового обслуживания

Для решения задачи важно рассмотреть вероятность перехода между состояниями в марковских процессах при условии пуассоновского потока событий. Пусть из некоторого состояния А система переходит в состояние В с интенсивностью λ и в состояние С с интенсивностью μ . Рассчитаем вероятности перехода из состояния А в состояние В. Рассмотрим выражения для времени перехода из одного состояния в другое:

$$\Delta t = -\frac{\ln(x)}{\lambda}, \quad (1)$$

где x — некоторая случайная величина распределена по равномерному закону в интервале $0 < x < 1$. Чтобы система перешла в состояние В, необходимо чтобы $\Delta t_B < \Delta t_C$.

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(x_B)}{\lambda} &< -\frac{\ln(x_C)}{\mu}; \\ \frac{\ln(x_B)}{\lambda} &> \frac{\ln(x_C)}{\mu}; \\ x_B &> x_C^{\frac{\lambda}{\mu}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Вероятность условия, полученного в (2) можно рассчитать с использованием следующего интеграла:

$$\int_0^1 dx_C \int_{x_C^{\frac{\lambda}{\mu}}}^1 dx_B = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (3)$$

Формулу можно обобщить для случая n возможных переходов. В силу того, что поток, являющийся суммой двух пуассоновских потоков, также является пуассоновским с интенсивностью равной сумме интенсивностей этих потоков, и учитывая формулу (3), можно показать, что вероятность перехода в некое l -е состояние определяется как отношение:

$$P_{A \rightarrow l} = \frac{\lambda_l}{\sum \lambda_{Ai}}, \quad (4)$$

где λ_l — интенсивность перехода из состояния А в состояние l ;

λ_{Ai} — интенсивности перехода из состояния А во все возможные состояния.

Данная формула справедлива не только для задач с дискретными состояниями и непрерывным временем, но и для задач с дискретными состояниями и дискретным временем.

4. Пример моделирования экологической системы «хищник — хищник» на основе метода волны вероятности

В качестве примера моделирования экологической системы «хищник — хищник» с помощью метода волны вероятности рассмотрим взаимодействие 10 волков и 10 лис. Предположим, что две данные популяции по своим биологическим характеристикам подобны друг другу. Таким образом, вероятности переходов между состояниями будут одинаковыми и равными 0,5. Полученные значения распределений вероятностей для волков представим на рисунке 2, а для лис — на рисунке 3.

Из полученных графиков видно, что вероятность потерь от конкурентной борьбы двух видов хищников составит 0,45. Прогноз в данном случае является неблагоприятным.

Дальнейшим развитием работы будет переход от использования метода волны вероятности в экологической системе «хищник — хищник» к его применению в экономической системе с различными видами конкуренции.

Выводы

1. Разработан метод волны вероятности для расчета плотности вероятности численности популяций экологической системы «хищник — хищник». Идея метода заключается в том, что расчет вероятностей предельных состояний графа аналогичен расчёту волнового фронта волны на основе принципа Гюйгенса — Френеля.
2. Обоснована возможность применения теории систем массового обслуживания для описания экологической системы «хищник — хищник».
3. Так как экологическая система «хищник — хищник» может применяться в конфликтах малой интенсивности, в которых у противоборствующих сторон антагонистические интересы, то её можно также использовать и для моде-

лирования современных боевых действий, характеризующихся очаговым характером боев столкновений малочисленных вооруженных подразделений.

4. На основании анализа экологической системы «хищник — хищник» можно будет исследовать поведение различных видов популяций в экологической системе «хищник — жертва».

ЛИТЕРАТУРА

1. Кундашева Е. С. Математические методы и модели в экономике — М.: Издательство — торговая корпорация «Дашков и КО», 2018—286с.
2. Васильев К.К., Служивый М. Н. Математическое моделирование инфокоммуникационных систем. — М.: Горячая линия — Телеком, 2018—236с.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В., Теория Игр — Спб.: «БХВ — Петербург», 2017—432с.
4. Кремлёв А. Г. Теория игр. Основные понятия — Екб.: Издательство уральского университета, 2019—141с.
5. Оре О. Теория графов — М.: URSS2008—352с.
6. Савельев И. В. Курс общей физики, том 3 — М.: Издательство «Наука» 1971—528с.
7. Ивченко Г.И., Медведев Ю. И. Введение в математическую статистику — М.: URSS2015—600с
8. Карташевский В.Г., Основы теории массового обслуживания — М.: Горячая линия — Телеком, 2015—130с.
9. Новиков А. И. Экономико-математические методы и модели. — М.: Издательство — торговая корпорация «Дашков и КО», 2008—532с.

© Зайцев Дмитрий Викторович, Шамаева Ольга Юрьевна, Шведов Николай Александрович (Shvedovn@gmail.com).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»



Национальный исследовательский университет «МЭИ»