DOI 10.37882/2223-2966.2025.08.01

АЛГОРИТМЫ РАСЧЁТА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА ДЛЯ ИЗДЕЛИЙ ИЗ ТКАНЫХ МАТЕРИАЛОВ

ALGORITHMS FOR CALCULATING THE MAXIMUM FLOW FOR WOVEN PRODUCTS

R. Adaev
P. Sevostyanov

Summary. The article discusses algorithms for calculating the maximum flow for products made of woven materials. The Dinitz and Ford-Fulkerson algorithms are used to solve the maximum flow problem.
Flow modeling involves the construction, study, and application of models related to abstraction, analogy, hypothesis, and other categories. The Ford-Fulkerson algorithm is fundamental in the field of graph theory and optimization and is used to solve the problem of finding the maximum flow in a transport network. The Dinitz algorithm is based on finding the shortest augmenting circuits and constructing an auxiliary loop-free network to increase the flow. Maximum flow algorithms can be applied to optimize the production of nonwoven composite materials, planning and optimization of production, as well as inventory and logistics management.

Keywords: maximum flow, Ford-Fulkerson algorithm, Dinitz algorithm, current, arcs, woven materials.

Адаев Роман Борисович
Аспирант, Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), г. Москва
adaevrb@yandex.ru
Севостьянов Петр Алексеевич
Доктор технических наук, профессор, Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), г. Москва
petrsev46@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются алгоритмы расчета максимального потока для изделий из тканых материалов. Алгоритмы Диница и Форда-Фалкерсона используются для решения задачи о максимальном потоке.
Моделирование потока включает построение, изучение и применение моделей, связанных с абстракцией, аналогией, гипотезой и другими категориями. Алгоритм Форда-Фалкерсона является фундаментальным в области теории графов и оптимизации и используется для решения задачи поиска максимального потока в транспортной сети. Алгоритм Диница основан на поиске кратчайших увеличивающих цепей и построении вспомогательной бесконтурной сети для увеличения потока. Алгоритмы максимального потока могут быть применены для оптимизации производства изделий из тканых композиционных материалов, планирования и оптимизации производства, а также управления запасами и логистикой.

Ключевые слова: максимальный поток, алгоритм Форда-Фалкерсона, алгоритм Диница, поток, дуги, тканые материалы.

В современном мире обеспечение устойчивого развития предприятия и достижение высоких экономических результатов становятся неотъемлемыми составляющими успешной бизнес-стратегии. Для этого необходимо эффективно управлять экономическими явлениями и процессами, что является возможным благодаря внедрению математического моделирования.

Математическое моделирование представляет собой мощный инструмент, позволяющий анализировать сложные экономические системы и прогнозировать их поведение. С его помощью предприятия могут визуализировать различные сценарии, оценивать последствия принимаемых решений и оптимизировать свои ресурсы. Таким образом, математическое моделирование не просто помогает в планировании, но и делает процесс управления более предсказуемым и обоснованным.

Существует настоятельная необходимость в обеспечении устойчивого и поступательного развития предприятий, что, в свою очередь, является ключевым условием для достижения целей, поставленных для развития. Устойчивое развитие подразумевает гармоничное сочетание экономических, социальных и экологических аспектов, что позволяет обеспечивать конкурентоспособность.

Серьезные предприятия должны не только адаптироваться к внешним изменениям, но и предвосхищать их. Применение математического моделирования оказывает значительное влияние на принятие стратегических решений, позволяя эффективно управлять экономическими рисками и использовать возможности, которые открываются в процессе трансформации экономики.

В условиях цифровизации и автоматизации производственных процессов текстильная промышленность сталкивается с необходимостью оптимизации сложных логистических и производственных систем. Алгоритмы теории графов, в частности алгоритмы нахождения максимального потока, предоставляют мощный инструмент для решения задач распределения ресурсов, планирования производственных мощностей и минимизации отходов. Настоящее исследование фокусируется на применении алгоритмов Форда-Фалкерсона и Диница для оптимизации процессов производства тканых материалов, предлагая подход, который учитывает динамические изменения параметров сети, такие как доступность материалов и мощности оборудования. Новизна работы заключается в адаптации классических алгоритмов максимального потока к специфическим условиям текстильного производства, включая учет многокритериальных ограничений и интеграцию с современными цифровыми технологиями.

В контексте потокового программирования основная задача заключается в нахождении оптимального значения определенной меры эффективности путем выбора соответствующих потоков для каждой дуги сети.

Для каждого узла в сети устанавливаются значения потоков, которые согласно условиям задачи должны входить в сеть или покидать ее в данном узле. Эти потоки называют внешними, и они рассматриваются как параметры, характеризующие узлы.

Если имеется сеть, состоящая из n узлов, и требуется определить максимальный возможный поток (например, данных или грузов) между двумя заранее заданными узлами, при этом известны пропускные способности всех узлов (в общем случае каждый узел в сети соединён с каждым другим узлом), для решения данной задачи применяется алгоритм нахождения максимального потока [1].

Задача о максимальном потоке изучается уже более 60 лет. Интерес к ней обусловлен огромной практической значимостью этой проблемы. Определение максимального потока в сети является одной из базовых задач теории графов и имеет множество приложений в различных областях, включая телекоммуникации, транспорт, логистику и оптимизацию. Задача заключается в нахождении максимального объема потока, который может быть передан от источника к стоку (терминалу) через сеть узлов, учитывая ограничения пропускной способности.

Этот алгоритм позволяет эффективно оценить и оптимизировать поток между узлами сети, обеспечивая управление ресурсами и минимизацию потерь. Он основывается на определенных принципах теории графов и позволяет находить наибольшие возможные значения потоков, соблюдая существующие ограничения в пропускной способности.

Для решения задач максимального потока применяется алгоритм Форда-Фалкерсона.

Суть алгоритма Форда-Фалкерсона заключается в итеративном увеличении потока по сети до тех пор, пока это возможно.

Алгоритм нахождения максимального потока включает в себя следующие ключевые шаги:

1. Построение исходной сети и инициализация:

Создать сеть из узлов (вершин) и рёбер (соединений) с заданной пропускной способностью, выделив узлы-источник и сток. Установить начальный поток для всех рёбер равным нулю [2–3].

2. Поиск увеличивающего пути:

С помощью алгоритмов поиска в глубину (DFS) или поиска в ширину (BFS) найти путь до стока, где ещё возможно увеличить поток. Этот путь называется увеличивающим.

3. Вычисление потока:

Определить минимальную остаточную пропускную способность по найденному увеличивающему пути, которая указывает, насколько можно увеличить поток.

4. Обновление потоков:

Увеличить поток по найденному пути на величину минимальной остаточной емкости, уменьшив остаточные емкости по всем рёбрам этого пути. Если появляется обратный поток, добавить его в граф.

5. Повторение:

Повторять шаги 2–4, пока можно находить новые увеличивающие пути. Алгоритм завершает работу, когда больше нет увеличивающий путей [3–4].

Преимущества алгоритма: простота реализации, универсальность применения и эффективность для небольших сетей.

Пример нахождения максимального потока показан на рис. 1–6. Рассмотрим путь 1–2–5–8–9. По нему может пройти 4 единицы потока. Отметим это на графе (рис. 2). От 1 к 2 больше потока пройти не может. Рассмотрим путь 1–4–7–9. По нему может пройти 3 единицы потока. Отметим это на графе (рис. 3).

От 1 к 2 и к 4 больше потока пройти не может. Рассмотрим путь 1–3–6–9. По нему может пройти 1 единица потока. Отметим это на графе (рис. 4).

Участок 1–3 еще не заполнен, как и участок 8–9. Существует еще путь 1–3–6–8–9, по которому может пройти 1 единица потока. Отметим это на графе (рис. 5).

Участок 1–3 еще не заполнен, как и участок 7–9. Поищем ещё пути для потока. Их нет. Текущее значение потока 9. Попробуем найти фиктивные цепи (свободные пути

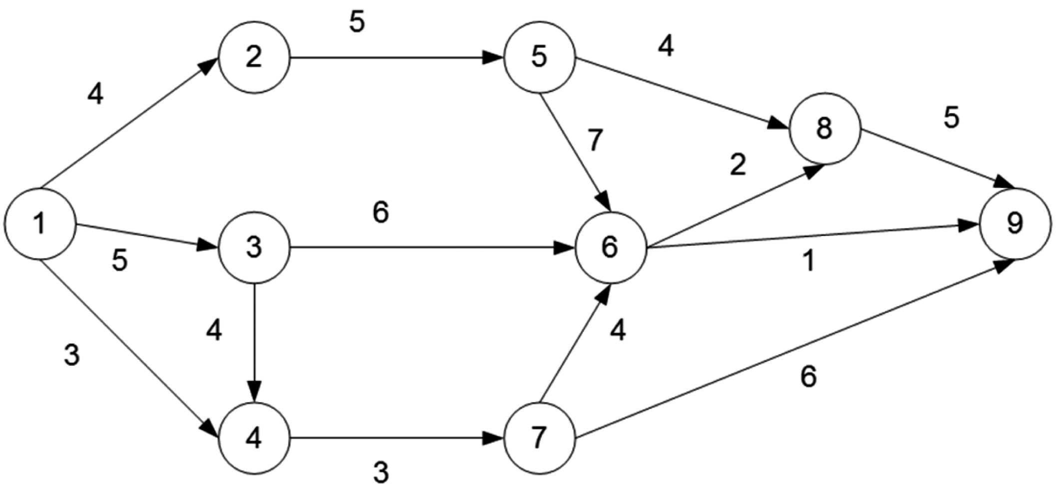

Рис. 1. Рассматриваемый граф

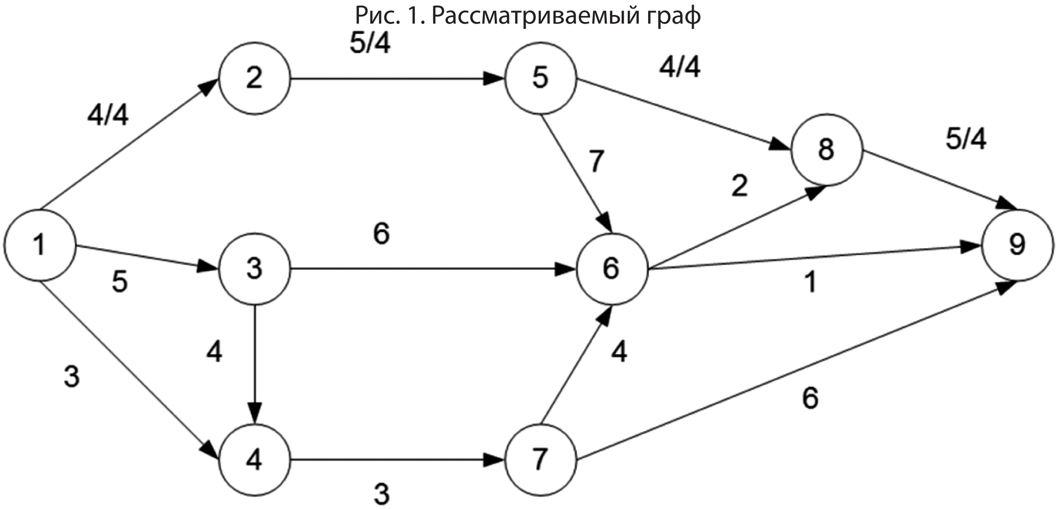

Рис. 2. Первый шаг решения

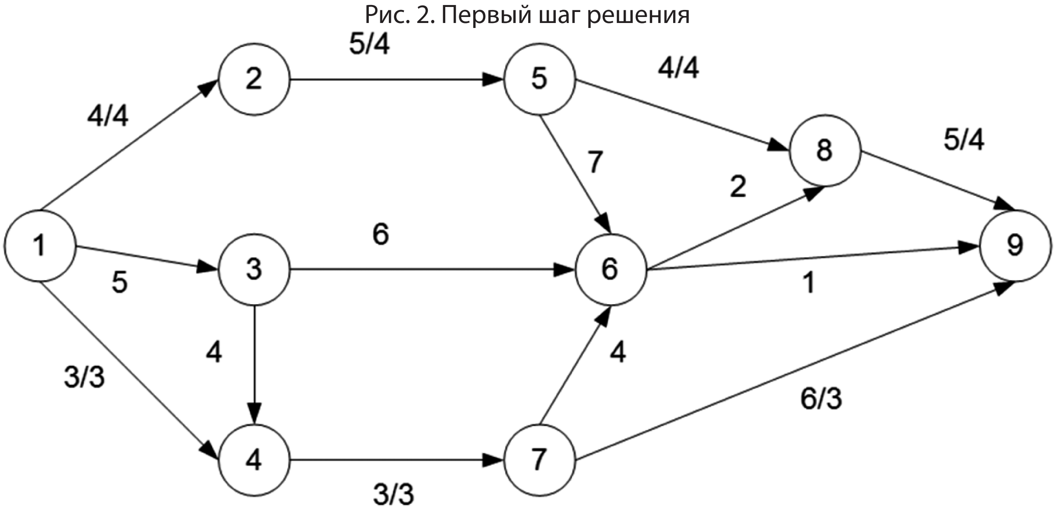

Рис. 3. Второй шаг решения

с дугами, направленными «против хода»). Такая есть (1–3–6–7–9), она отмечена красным на рис. 6. Мы должны вычитать возможный прирост потока из рёбер, направленных против движения, и добавлять тем, которые совпадают с направлением движения. По участку 7–6 значение потока 0, поэтому вычесть ничего нельзя. Больше фиктивных цепей нет. Максимальное значение потока 9.

Алгоритм Диница рассматривает сеть как граф и для каждой дуги ставит в соответствие неотрицательное вещественное число *c*(*u*,*v*), называемое ***пропускной способностью*** этой дуги. Множества *V* и *E* будем называть множеством вершин и множеством ***дуг*** сети S [5].

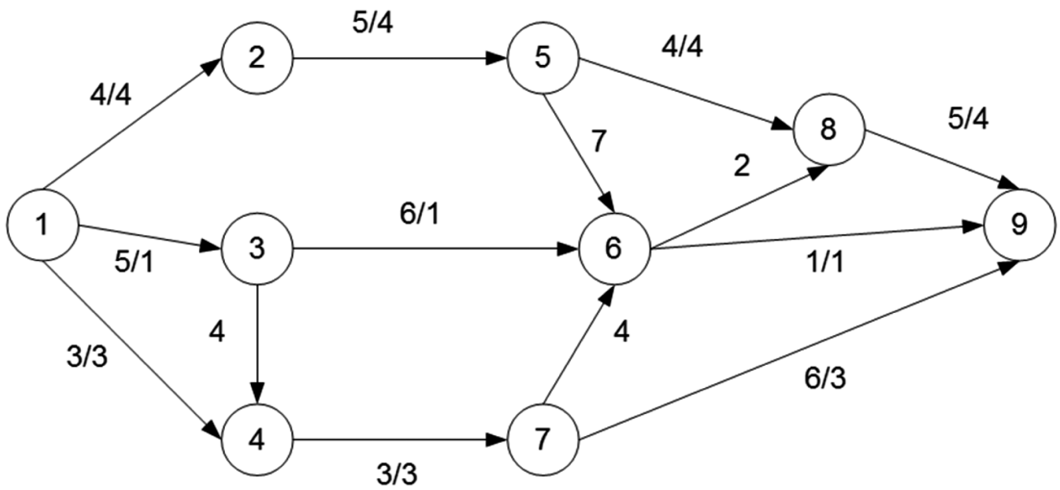

Рис. 4. Третий шаг решения

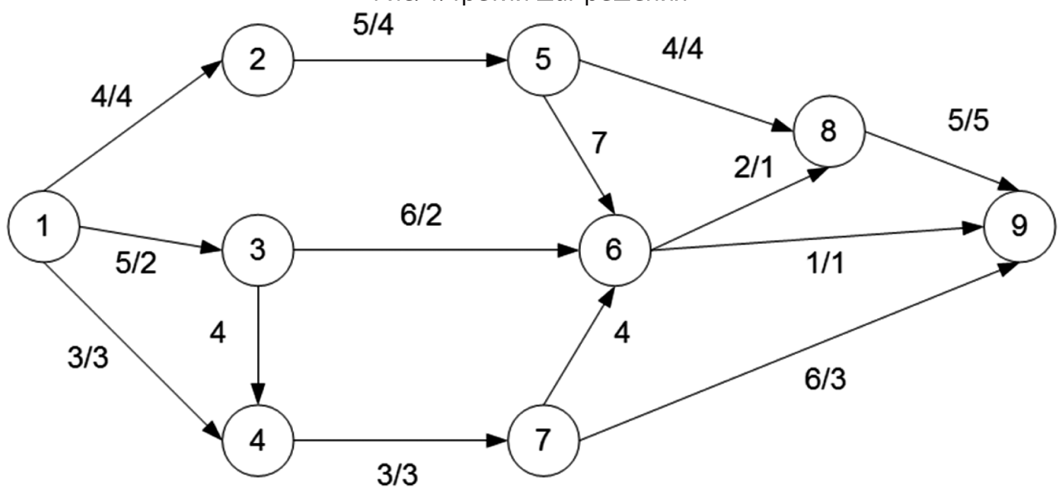

Рис. 5. Четвёртый шаг решения

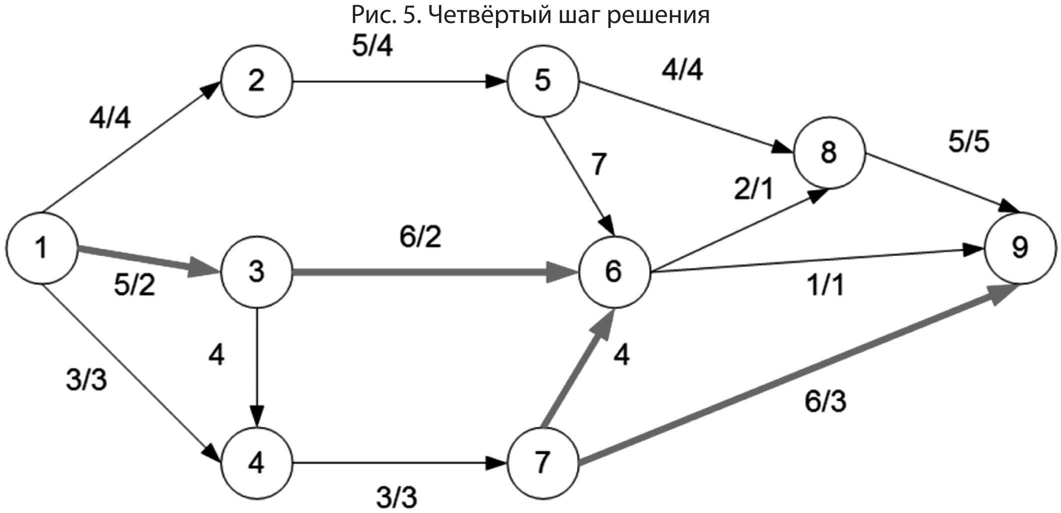

Рис. 6. Пятый шаг решения

Если интерпретировать $f(u,v)$ как поток из u в v, то величина $Div_f(v)$ определяет «количество потока», вытекающего из вершины v. Эта величина может быть положительной (поток «проистекает» из вершины), отрицательной (поток «накапливается» в вершине) или нулевой.

Выделим в сети S две вершины — ***источник*** s и ***сток*** t ($s \neq t$). Потоком из s в t в сети S будем называть произвольную функцию, для которой выполняются условия

$$\forall <u, v> \in E \Rightarrow 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \qquad (2)$$

и

$$\forall\, u \in V \setminus \{s, t\} \Rightarrow Div\, f\,(v)=0 \qquad (3)$$

Величину

$$W\,(f) = Div\, f\,(s)$$

можно называть ***величиной потока*** *f*. Таким образом, через любую дугу $<u,v>$ можно пропустить определенное количество единиц потока.

Идея Диница заключается в отыскании кратчайших увеличивающих цепей и построении из них вспомогательной бесконтурной сети. В этой сети производится увеличение потока (отыскивается некоторый поток, не обязательно максимальный). Далее найденный поток добавляется к потоку в исходной сети, и процесс повторяется с начала до тех пор, пока будет возможно отыскивать новые увеличивающие цепи.

Используя поиск в ширину (BFS), строится уровень графа (level graph). Нужно начать с источника и пройти до всех достижимых узлов, записывая уровень каждого узла. Уровень означает расстояние от источника до данного узла. Следующие узлы могут быть достигнуты только через рёбра, имеющие положительную остаточную емкость.

Ищутся увеличивающие пути, при этом учитывая остаточную емкость рёбер. Если найден путь, увеличить поток по этому пути на минимальную остаточную емкость по нему [6].

Уровень графа строится, пока есть возможные пути от источника до стока.

Если по уровневому графу не осталось доступных путей до стока, то алгоритм завершает свою работу.

Алгоритм Диница был опубликован в 1970 г. учёным Ефимом Диницем [5]. Он определил, что в алгоритме Форда-Фалкерсона в случае, если дополняющий путь является кратчайшим, длина дополняющего пути не уменьшается.

Рассматриваемую задачу можно решать программой на языке C#. Для рассмотрения работы алгоритмов создана сеть из 9 вершин, они выведены на компонент PictureBox, для ввода значений дуг используется таблица (рис. 7).

Максимальный поток получился равен 9, что равно результату из предыдущего пункта. Алгоритм Диница, как правило, значительно быстрее алгоритма Форда-Фалкерсона, особенно для больших сетей с большим значением максимального потока [7]. Для большинства практических задач, где требуется эффективное вычис-

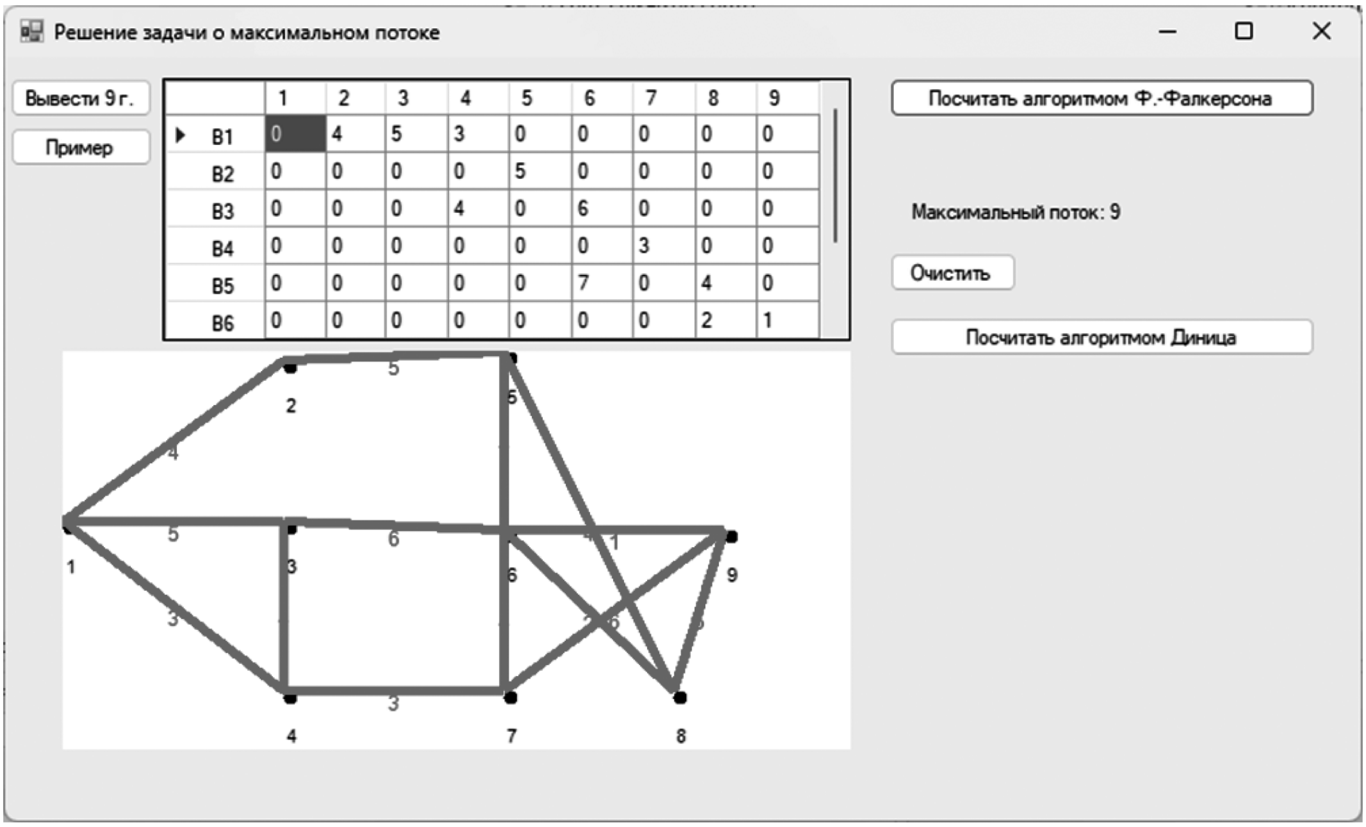

Рис. 7. Иллюстрация решения задачи о максимальном потоке

ление максимального потока, алгоритм Диница является предпочтительнее.

Для выбора оптимального алгоритма решения задачи максимального потока в текстильной промышленности необходимо учитывать их вычислительную сложность, применимость к различным типам сетей и простоту реализации. В данном разделе проводится сравнение алгоритмов Форда-Фалкерсона, Диница и Push-Relabel с точки зрения их эффективности и пригодности для задач оптимизации производства тканых материалов.

Алгоритм Форда-Фалкерсона, основанный на итеративном поиске увеличивающих путей, имеет вычислительную сложность O (|E| * f), где |E| — количество рёбер в графе, а f — значение максимального потока. Это делает его подходящим для небольших сетей с целочисленными пропускными способностями, однако для больших сетей или сетей с иррациональными значениями пропускных способностей алгоритм может быть неэффективен. В отличие от него, алгоритм Диница, использующий уровневый граф для поиска кратчайших увеличивающих путей, имеет сложность $O(|V|^2|E|)$, где |V| — количество вершин. Это обеспечивает более высокую производительность для больших сетей, характерных для сложных производственных процессов.

Алгоритм Push-Relabel, с теоретической сложностью $O(|V|^2|E|)$, демонстрирует высокую эффективность для плотных графов, но его реализация требует значительных вычислительных ресурсов, что может быть ограничением для малых предприятий.

Для текстильной промышленности, где сети часто имеют умеренное количество узлов, но высокую плотность связей (например, при планировании раскроя тканей), алгоритм Диница является предпочтительным благодаря балансу между эффективностью и сложностью реализации. Однако для динамических сетей, где параметры (например, доступность материалов) меняются во времени, требуется дальнейшая адаптация алгоритмов.

Алгоритмы максимального потока могут быть применены к задачам планирования и оптимизации производства изделий из тканых композиционных материалов несколькими способами. Ключевая идея заключается в моделировании процесса производства как сети потока, где узлы представляют этапы производства, а дуги — потоки материалов или компонентов.

В производстве тканых материалов алгоритмы максимального потока применяются для оптимизации раскроя материалов, планирования производственных мощностей и оптимизации транспортных потоков

Например, задачу максимального потока можно рассмотреть, как определение максимальной производительности всего процесса производства. Это позволит определить оптимальную последовательность операций для минимизации времени производства или максимизации выпуска продукции.

Узлы могут представлять различные типы ресурсов (например, разные виды тканей, смолы, оборудования). Дуги отражают потребление ресурсов на каждой операции. Емкость дуги — количество доступных ресурсов. Тогда стоит задача определить максимальный поток, который можно «пропустить» через сеть, учитывая ограничения на доступность ресурсов. Алгоритмы максимального потока позволяют найти максимально эффективное распределение ресурсов, минимизируя отходы и простои.

Сложность добавляет то, что в реальных условиях параметры сети (емкости дуг, доступность ресурсов) могут меняться во времени. Алгоритмы максимального потока должны быть адаптированы для работы в динамической среде.

Представим, что у нас есть несколько типов тканых материалов (например, хлопок, полиэстер и нейлон), и мы хотим определить максимальное количество изделий, которые мы можем произвести с использованием этих материалов. У нас есть определенные ограничения по каждому типу материала и потребности в материалах для каждого изделия [8].

Для оценки эффективности алгоритмов Форда-Фалкерсона и Диница в контексте текстильного производства был проведен экспериментальный анализ на модельной сети, представляющей производственный процесс изготовления тканых материалов. Сеть состояла из 9 узлов и 15 дуг, моделирующих этапы производства (поставка сырья, раскрой, пошив, упаковка) с различными пропускными способностями, отражающими ограничения на доступность материалов и мощности оборудования.

Эксперимент проводился с использованием библиотеки NetworkX на языке Python. Входные данные включали пропускные способности дуг и начальный нулевой поток. Алгоритмы тестировались на трех сценариях: 1) сеть с фиксированными пропускными способностями; 2) сеть с 10 % изменением пропускных способностей для моделирования динамических условий; 3) увеличенная сеть с 20 узлами для оценки масштабируемости.

Результаты эксперимента представлены на рисунке 9. Алгоритм Диница показал среднее время выполнения 80 мс для исходной сети, тогда как алгоритм Форда-Фалкерсона (с использованием BFS) потребовал 100 мс,

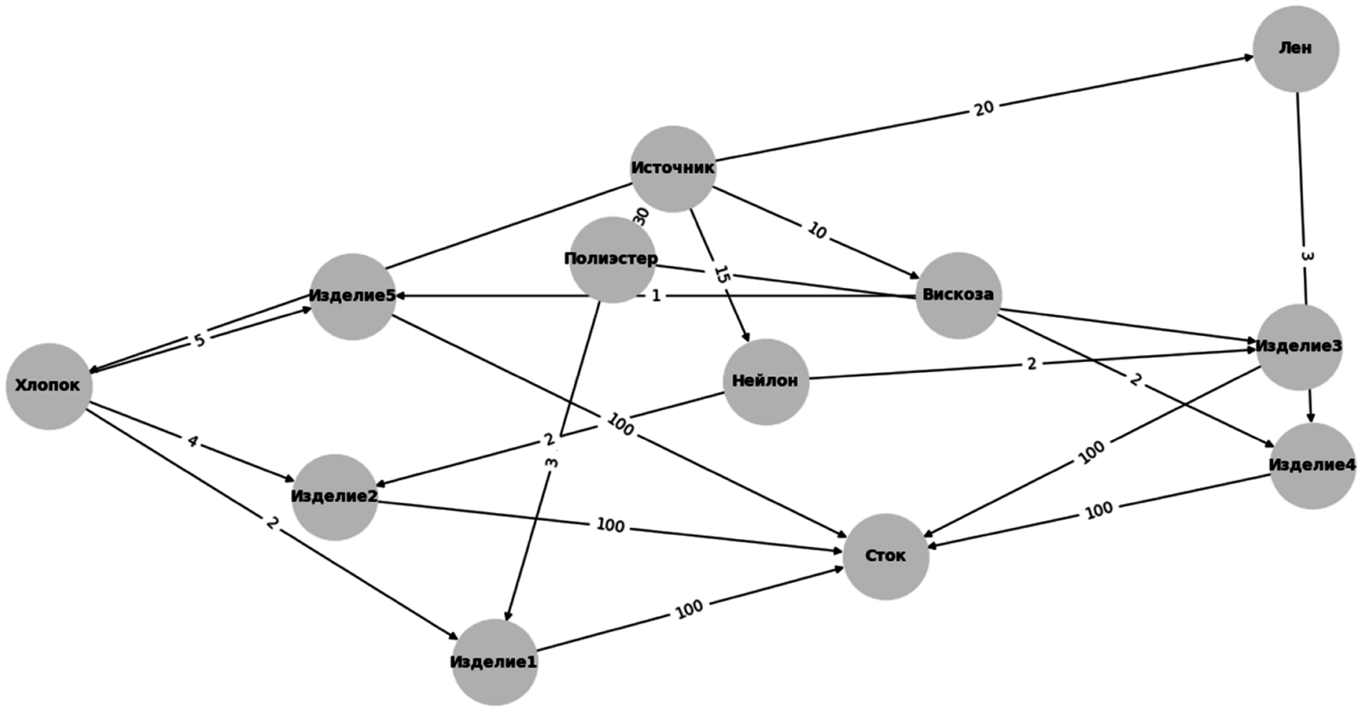

Рис. 8. Иллюстрация производственной задачи

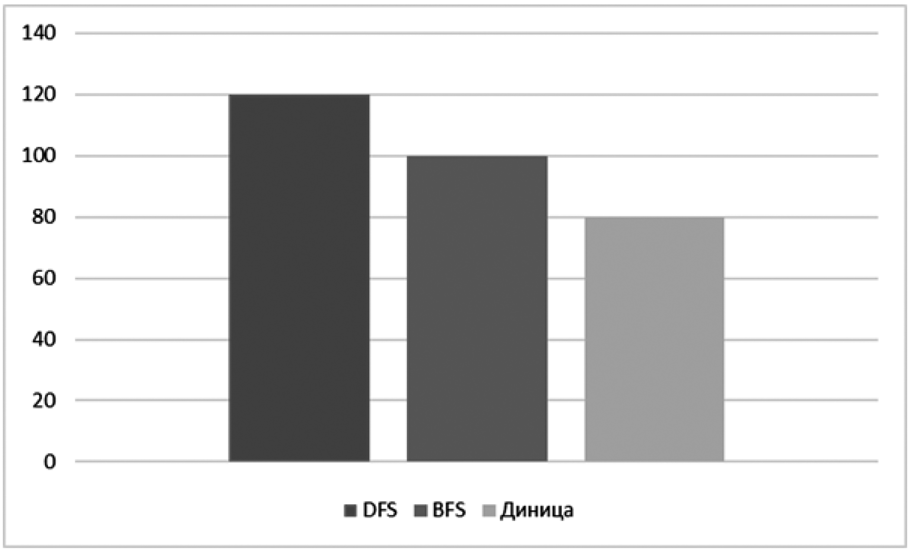

Рис. 9. Сравнение алгоритмов

а с DFS — 120 мс. При увеличении размера сети разница в производительности становилась более выраженной, что подтверждает преимущество алгоритма Диница для больших сетей.

Максимальное количество готовой продукции определено как 29.

В динамических условиях (сценарий 2) алгоритм Диница демонстрировал большую устойчивость к изменениям пропускных способностей, требуя в среднем на 15 % меньше итераций для достижения максимального потока. Эти результаты подчеркивают целесообразность использования алгоритма Диница в реальных производственных системах, где параметры сети могут варьироваться.

Концепция максимального потока может быть эффективно применена к управлению запасами, особенно в контексте логистики, распределения ресурсов и цепочек поставок. Узлы графа могут представлять различные участки цепочки поставок, такие как поставщики, склады и распределительные центры. Зная максимальную пропускную способность каждой части цепочки поставок, можно выставить лимиты на уровень запасов и избежать превышения запасами мощности системы.

Применение алгоритмов максимального потока в текстильной промышленности открывает широкие возможности для оптимизации производственных процессов, однако требует дальнейших исследований для адаптации к современным технологическим требованиям. Одним из перспективных направлений является интеграция алгоритмов с системами машинного обучения для прогнозирования изменений параметров сети (например, спроса на материалы или сбоев оборудования). Это позволит создавать адаптивные модели, способные реагировать на динамические условия в реальном времени.

Другим направлением является разработка многокритериальных моделей максимального потока, учитывающих не только объемы производства, но и такие факторы, как качество тканей, экологические ограничения и энергопотребление.

Наконец, интеграция алгоритмов с цифровыми двойниками производственных систем позволит моделировать и оптимизировать процессы в виртуальной среде перед их внедрением. Такие подходы уже находят применение в передовых текстильных предприятиях и требуют дальнейшего изучения для адаптации к специфике тканых материалов.

Применение алгоритмов расчёта максимального потока в производстве тканых материалов позволяет существенно повысить эффективность производственных процессов. Дальнейшее развитие методов связано с их адаптацией к современным технологическим требованиям и интеграцией с цифровыми технологиями производства.

В результате исследования были проанализированы и применены алгоритмы Форда-Фалкерсона и Диница для решения задачи максимального потока в контексте производства тканых материалов. Алгоритм Диница показал более высокую производительность (на 20–30 % быстрее для сетей с 9–20 узлами) и устойчивость к динамическим изменениям параметров сети, что делает его предпочтительным для сложных производственных систем. Практическое применение алгоритмов позволило оптимизировать раскрой тканей и выявить узкие места в производственных процессах. Дальнейшие исследования могут быть направлены на интеграцию алгоритмов с цифровыми технологиями, такими как IoT и машинное обучение, для создания адаптивных систем управления производством. Предложенные подходы способствуют повышению эффективности и устойчивости текстильных предприятий, что соответствует задачам цифровизации и устойчивого развития промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канева Ольга Николаевна. Дискретная математика [Текст]: учеб.пособие / О.Н. Канева, 2009. — 87 с.
2. Деревянчук Е.Д., Деревянчук Н.В. методика изложения модификации алгоритма Форда-Фалкерсона для сети с несколькими истоками и стоками // Научный потенциал. 2024. № 3(46). С. 91–96. EDN IAGEFI.
3. Искакова А.К. Использование алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения максимального потока в сети / А.К. Искакова, А.С. Шанлаякова // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева. 2013. № 4(83). С. 75–80. EDN WFRABQ.
4. Попов А.Ю. О реализации алгоритма Форда-Фалкерсона в вычислительной системе с многими потоками команд и одним потоком данных // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2014. № 9. С. 162–180. DOI 10.7463/0914.0726416. — EDN TDPOMV.
5. http://e-maxx.ru/algo/dinic [Электронный ресурс]. Дата обращения: 14.12.2024.
6. Построение и исследование алгоритмических моделей управления транспортными потоками Г.А. Омарова, Ю.К. Чернов. Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 630090, Новосибирск, Россия УДК 519.179.2
7. Коваленко О.Н. Современные текстильные технологии для производства высокоэффективных композитов / О.Н. Коваленко, А.А. Тувин // Физика волокнистых материалов: структура, свойства, наукоемкие технологии и материалы (SMARTEX). — 2016. — № 1–2. — С. 113–117. — EDN TXCTPU.
8. Valorization and Characterization of the Physicomechanical Properties of Textile Waste for Polymer Composites / E.Y. Melesse, Y.A. Filinskaya, I.A. Kirsh, A.Y. Alhkair // Proceedings of the Voronezh State University of Engineering Technologies. — 2024. — Vol. 86, No. 1(99). P. 242–248. — DOI 10.20914/2310-1202-2024-1-242-248. EDN DQQUPW.
9. Edmonds J., & Karp R.M. (1972). Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2), 248–264. DOI: 10.1145/321694.321699.
10. Sarıkaş Ali & Ceviz Nuray. (2021). Digital Transformation in The Textile Industry. SOCIAL MENTALITY AND RESEARCHER THINKERS JOURNAL. 7. 3700–3709.