

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛОСКОСТНЫХ МОДЕЛЯХ КОНСТРУКЦИЙ РЭС

### MODELING OF MECHANICAL PROCESSES IN PLANE MODELS OF DES STRUCTURES

**A. Andryukhin  
N. Grachev  
D. Boyko**

*Summary.* The reliability of the operation of the equipment is one of the main tasks that the designer must constantly keep in mind throughout all stages of its design. He must create the most favorable conditions for the operation of parts, components and components of the equipment, as well as develop ways to protect them from environmental influences. This article discusses the design of a topological model of printing units, taking into account the impact of mechanical factors.

*Keywords:* modeling, design, vibration resistance, design.

**Андрюхин Александр Гаврилович**

К.т.н., доцент, МИРЭА — Российский  
технологический университет (г. Москва)  
pr1110@list.ru

**Грачев Николай Николаевич**

К.т.н., профессор, МИРЭА — Российский  
технологический университет (г. Москва)  
nnggrachev@mail.ru

**Бойко Денис Владимирович**

МИРЭА — Российский технологический университет,  
г. Москва  
den87–2004@mail.ru

*Аннотация.* Безотказность функционирования аппаратуры является одной из основных задач, которую постоянно должен иметь в виду конструктор на протяжении всех этапов её проектирования. Он должен создать наиболее благоприятные условия для работы деталей, элементов и узлов аппаратуры, а также разработать способы их защиты от воздействия окружающей среды. В данной статье рассматривается проектирование топологических модели печатных узлов с учетом воздействия механических факторов.

*Ключевые слова:* моделирование, проектирование, вибропрочность, конструкция.

**В**ибрационные воздействия, действующие на аппаратуру, охватывают широкий интервал частот от 5 до 5000 Гц. Ударные и вибрационные нагрузки ухудшают надёжность РЭС, поэтому предпринимаются попытки тем или иным способом учесть влияние механических воздействий на надёжность. Около 50% отказов радиоэлектронных средств возникает из-за недопустимо больших деформаций монтажных плат, разгерметизации соединений корпусных элементов, нарушений в электромонтаже, разрушение паянных и сварных соединений при механических и термических воздействиях. В связи с этим конструкторам и технологам РЭС и её элементарной базы приходится решать сложные задачи обеспечения прочности различных по структуре и свойствам узлов.

Исходным аналитическим выражением, описывающим механические колебания плоской конструкции (печатного узла), в рамках технической теории тонких пластин является бигармоническое уравнение [1]:

$$\begin{aligned} \overline{D}_1 = & \left( \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} \right) + 2\overline{D}_3 \left( \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \overline{D}_2 \left( \frac{\partial^4 W_1}{\partial y^4} \right) + \\ & + m_1 \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Где  $w_l$  — прогиб печатной платы в точке с координатами  $x, y$  в момент времени  $t$ ;

$m_1$  — масса печатного узла, приходящаяся на единицу площади в точке 1;

$$\overline{D}_1 = \frac{\overline{E}_1 S^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}$$

цилиндрическая жесткость печатной платы по оси  $x$ ;

$$\overline{D}_2 = \frac{\overline{E}_1 S^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}$$

цилиндрическая жесткость печатной платы по оси  $y$ .

$$\overline{D}_3 = \overline{D}_1 \mu_2 + 2\overline{D}_m = \overline{D}_2 \mu_1 + 2\overline{D}_k$$

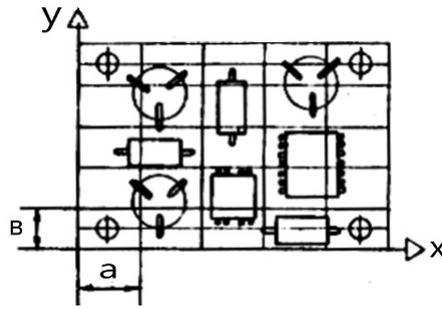


Рис. 1. Чертеж печатного узла с нанесенной сеткой

главная жесткость;

$$\bar{D}_k = \frac{\bar{G}S^3}{12}$$

жесткость кручения;

$$\bar{G} = \frac{E_{45}}{2(1 + \mu_{45})}$$

модуль сдвига материала печатной платы;

$S$  — Толщина платы;

$E_1, E_2, E_{45}$  — модули упругости материала платы по осям  $x, y$  и под углом  $45^\circ$  к осям соответственно;

$\mu_1, \mu_2, \mu_{45}$  — коэффициенты Пуансона материала платы по осям  $x, y$  и под углом  $45^\circ$  к осям соответственно (считаем, что направление осей  $x$  и  $y$  совмещено с направлением сторон печатной платы).

Так как на печатной плате установлены ЭРЭ, необходимо учесть их массу и цилиндрическую жесткость, которая вычисляется по тем же формулам, что и для печатной платы. Это относится в основном к ЭРЭ, жестко скрепленным с платой. Для навесных ЭРЭ их цилиндрической жесткостью можно пренебречь. Вычисленную жесткость ЭРЭ суммируем с цилиндрической жесткостью соответствующего участка ПУ, то есть того, где установлен ЭРЭ.

Для учета рассеяния энергии на внутреннее трение в материале платы используется гипотеза Сорокина, сущность которой состоит в комплексном представлении упругих постоянных материала. Комплексный модуль упругости выразится как:

$$\bar{E}_i = E_i + (i + j\gamma), i = 1, 2, 4, 5 \dots \quad (2)$$

Где  $E_i$  — статический модуль упругости;  
 $\gamma$  — коэффициент механических потерь.

Коэффициент механических потерь связан с логарифмическим декрементом затухания колебаний (ЛДЗК) следующим соотношением:

$$\gamma = \Delta/k, \quad (3)$$

Значения ЛДЗК в зависимости от механических напряжений при изгибных колебаниях для ряда конструкционных материалов, применяемых для изготовления несущих конструкций РЭС, приведены в [2].

Для определения  $\gamma$  необходимо знать механическое напряжение, которое можно получить только после решения уравнения (1). Поэтому решение приходится проводить в несколько итераций. Вначале решается уравнение при ориентировочном значении  $\gamma$ , затем вычисляется напряжение и корректируется  $\gamma$ .

При проектировании конструкций РЭС большое значение имеет анализ их динамических свойств в частотной области [3]. Для перехода в (1) в частотную область воспользуемся экспоненциальной формой представления переменных величин, в данном случае прогиба  $w$ :

$$W_t^{(t)} = \bar{W}_t \theta^{j\omega t}, \quad (4)$$

Где  $\bar{W}$  — комплексная амплитуда прогиба в точке 1 печатного узла.

Замерим в (1) частные производные по координатам приближенными выражениями через конечные разности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} &= (i \in W_1 - 4(W_1 + W_3)W_{10} + W_{12}1/a^4; \\ \frac{\partial^4 W_1}{\partial y^4} &= (i \in W_1 - 4(W_1 + W_4)W_9 + W_{11}1/b^4; \\ \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4 \partial y^2} &= (4W_1 - 2(W_1 + W_2 + W_3 + W_4) + \\ &W_5 + W_6 + W_7 + W_8)/a^2 b^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Где  $a$  и  $b$  — шаги сетки по осям  $X$  и  $Y$ , накладываемой на чертеж печатного узла, как это показано на рисунке 1;

$W_1 - W_{12}$  — прогибы печатного узла от исходного положения равновесия в точках 1–12, расположенных в уз-

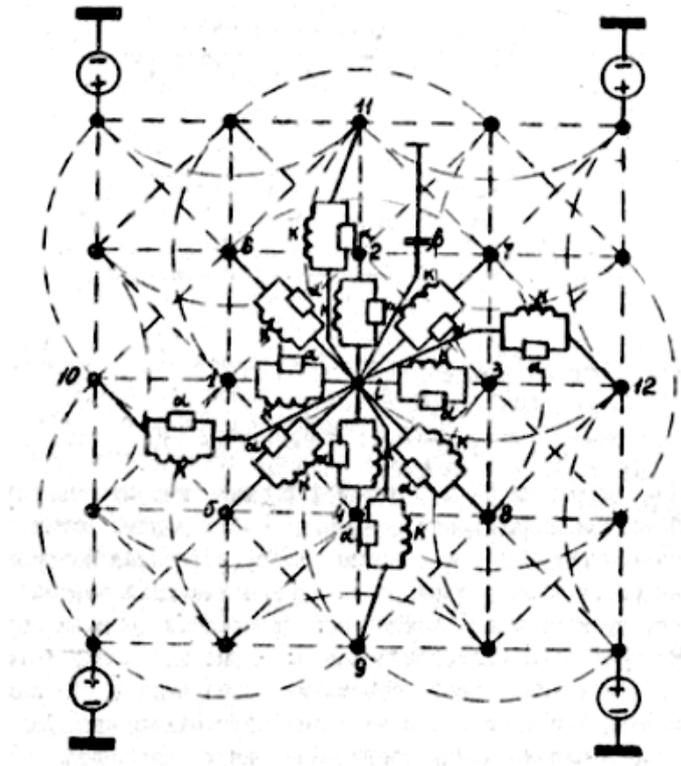


Рис. 2. Топологическая модель печатного узла РЭС

лах сетки вокруг произвольной точки 1, как это показано на рисунке 2.

Подставим (4) и (5) в (1). После группировки слагаемых с одинаковыми значениями прогибов получим:

$$\begin{aligned}
 & -4 \frac{\overline{D}_1 b^2 + \overline{D}_3 a^2}{a^4 b^2} \sum_{i=1,3} (\overline{W} - \overline{W}_1) - \\
 & -4 \frac{\overline{D}_2 a^2 + \overline{D}_3 b^2}{a^2 b^4} \sum_{i=2,4} (\overline{W}_i - \overline{W}_t) + \\
 & + \frac{2\overline{D}_3}{a^2 b^3} \sum_{r=s} (\overline{W}_a - \overline{W}_1) + \\
 & + \frac{\overline{D}_1}{a^4} \sum_{i=10:12} (\overline{W}_1 - \overline{W}_1) + \frac{\overline{D}_2}{b^4} \sum_{i=10:12} (\overline{W}_1 - \overline{W}_1) + \\
 & + \frac{\overline{D}_2}{b^4} \sum (\overline{W} - \overline{W}_1) + m_t (j\omega)^a \overline{W}_1 = 0, \quad (6)
 \end{aligned}$$

Поскольку чертеж на рис. 1 разделен сеткой на участки площадью  $ab$  каждый, то в последнем слагаемом полученного уравнения целесообразно перейти к массе участка, в центре которого расположена точка 1. Разделим исходное слагаемое в уравнении (6) на  $J\psi$ . Наконец, раскроем в уравнении (1) комплексной жесткости в виде:

$$\overline{D}_1 = D_1(i + j\gamma), i = 1,2,3$$

и выделим отдельно консервативные и диссипативные параметры. После указанных преобразований уравнение (1) примет вид, который можно представить в унифицированных обозначениях:

$$\sum_{i=1}^{12} h_{1i} (\varphi_1 - \varphi_i) + h_{1,0} \varphi_1 = 0. \quad (7)$$

Где  $\varphi_1 = \overline{W}_1, \varphi_i = \overline{W}_i$  — потенциальные переменные величины узлов топологической модели печатного узла;

Обобщенные параметры ветвей модели выразим уравнением:

$$h_{1,t} = \frac{1}{j\omega k_{1,1}} + a_{1,2} h_{1,0} = j\omega B_{1,0}. \quad (8)$$

Причем:

$$\begin{aligned}
 k_{1,1} = k_{1,3} &= -\frac{a^3 b}{4(D_1 b^2 + D_3 a^2)}; \\
 k_{1,2} = k_{1,4} &= -\frac{a^3 b}{4(D_2 a^2 + D_3 b^2)};
 \end{aligned}$$

$$k_1 = -\frac{ab}{2D_3}; r = 5,6,7,8; k_{1,9} = k_{1,t} = \frac{b_3}{D_2a};$$

$$k_{1,10} = k_{1,12} = \frac{a^3}{D_t b};$$

$$a_{1,2} = \frac{\Gamma}{\omega k_{1,2}} r = 1 \dots 12; v_{1,0} = abm_1$$

Как видно из (7), любой 1-й узел синтезированной топологической модели должен быть соединен с 12 узлами сетки, окружающими 1-й узел (см. рис. 2), и с общим узлом, потенциал которого принят за нуль (на рис. 2 он условно обозначен полужирной чертой). На рис. 2 показаны пунктиром все ветви той логической модели прямоугольного участка печатного узла, показанного на рис. 1 между точками крепления 1, 2, 3 и 4. Из первого выражения (8) видно, что каждая ветвь, соединяющая 1-й узел с гнездом из двенадцати выделенных узлов, представляет собой параллельное соединение двух пассивных компонентов: консервативного с параметром  $k$ ; и диссипативного с параметром. На рис. 2 показано электрическое изображение этих компонентов, что подчеркивает возможность построения топологической механической модели ПУ в виде электрической сетки. Ка общий узел из каждого 1-го узла модели идет ветвь, содержащая консервативный компонент с параметром  $\beta_1$ . Потенциальные переменные узлов, соответствующих мостам крепления платы, должны быть заданы. Поэтому ветви этих узлов, идущие на общий узел, содержат потенциальные активные компоненты.

В результате расчета могут быть получены перемещение и ускорение в узлах модели печатного узла. Механические напряжения по оси  $x$  в 1-й точке рассчитываются по формуле:

$$y_1 = \frac{E_1 S}{2(1 - m_1 m_a)} \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right) + m_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}, \quad (9)$$

и по оси  $y$ :

$$y_1 = \frac{E_1 S}{2(1 - m_1 m_a)} \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right) + m_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Эквивалентное механическое напряжение в узле модели ПУ определяется согласно энергетической гипотезе по формуле:

$$y = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - y_1 y_2}. \quad (11)$$

Выражения (9), (10) аналогично (5) представляются конечными разностями. Напряжение  $\sigma$  используется для коррекции  $\gamma$ .

Для анализа механических процессов в ЭРЭ необходимо иметь возможность определять перемещение,

ускорение и угол изгиба в любой точке ПУ по осям  $X$  и  $Y$ . Нужно перейти от дискретной модели к непрерывной путем интерполяции функции двух переменных  $x$  и  $y$  по четырем точкам:

$$W(x, y) = (i - p)(i - m)W_{i,j} + p(i - m)W_{i+i,j} + (i - p)mW_{i,j+1} + pmW_{i-1,j+1}. \quad (12)$$

Где  $p = (x - x_1)/h$ ,  $m = (y - y_1)/l$ ;  $h$  — шаг изменения  $x$ ;  $l$  — шаг изменения  $y$ ;

$$W_{i,j}; W_{i+i,j}; W_{i,j+i}; W_{i+i,j+t} —$$

перемещения в узлах дискретной модели.

Учитывая, что угол изгиба платы вдоль определенной оси — это есть первая производная функции перемещения по соответствующей координате, получим на основе (12) выражения для углов изгиба:

$$\alpha_x = (1/\omega^2)((W_{1=1,j} - W_{i,j})/h + (W_{1,j} - W_{i+i,j} - W_{i,j+i} + W_{i+i,j=1})(y - y_1)/hl), \quad (13)$$

$$\alpha_y = (1/\omega^2)((W_{1=1,j} - W_{i,j})/l + (W_{1,j} - W_{i+i,j} - W_{i,j+i} + W_{i+i,j=1})(x - x_1)/hl). \quad (14)$$

Где  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  — углы изгиба сечений ПУ вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

Расчет ПУ аналитическими методами для ограниченного числа вариантов крепления плат с равномерным расположением ЭРЭ представлен в [4]. Там нет необходимости в дискретизации и интерполяции, так как по полученной формуле можно определить значение механической характеристики в любой точке. При этом в [4] не учитывается анизотропия свойств печатной платы по различным направлениям, а также используется линейная механическая модель, полученная на основе решения уравнения (1) методом Рэлея-Ритца.

Первая собственная частота колебаний ПУ рассчитывается по формуле:

$$f_{\text{ПУ}} = \frac{a}{2ka^2} \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (15)$$

Где  $a$  — коэффициент, учитывающий характер крепления платы;

$D$  — Цилиндрическая жесткость платы;

$m$  — Масса единицы площади ПУ.

$$D = \frac{ES^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (16)$$

$$m = \rho S + m_i. \quad (17)$$

$$a = N_1 \sqrt{N_2 + N_3 \left(\frac{a}{y}\right)^2 + N_4 \left(\frac{a}{y}\right)^4}. \quad (18)$$

$$a = 18,33 \sqrt{\frac{5(1 + 2l^2/3 + l^4)/2 + m(1 + l^4)}{1 + 3l^2 + 21l^4/5 + 3l^6 + l^8}}; \quad (19)$$

$$a = \frac{13,66 \sqrt{1/l^2(1 - 4l^2/3) + 32l^4/3 - 4l^6/3 + l^8} + 3m(1 + 22l^2 + l^4)/8}{l + 11l^2/9 + l^4}, \quad (20)$$

$$b = 114,47 \sqrt{\frac{1 + 8/13l^4 + 5m/13}{1 + 7l^2 + 119l^4/5 + 36l^6 + 16l^8}}. \quad (21)$$

$$W_j(x, y) = \frac{a_6 c_k x_1(x) Y_1(y)}{(2\Pi\Pi_{\text{ПУ}})^{\alpha, \gamma}}. \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{l}{\sqrt{f_{\text{ПУ}}}}. \quad (23)$$

$$C_k = \frac{S_{1x} S_{1y}}{S_{2x} S_{2y}}. \quad (24)$$

Цилиндрическая жесткость  $D$  и масса  $m$  определяют по формулам (16), (17).

Где  $E$  — усредненный модуль упругости и плотность материала платы соответственно;

$\mu$  — усредненный коэффициент Пуассона материала платы;

$S$  — Толщина платы;  $m$  — Масса РЭ, приходящаяся на единицу площади.

Для плат, закрепленных по контуру, коэффициент,  $a$  определится по формуле (18).

Где  $a, b$  — длина и ширина плат соответственно;

$N_1, N_2, N_3, N_4$  — коэффициенты, приведенные для некоторых случаев в зависимости от способа крепления платы.

Для плат, закрепленных в четырех точках по углам, в пяти точках по углам и в центре, а также в шести точках по периметру коэффициент,  $a$  соответственно будет равен (19), (20), (21).

Где  $a$  — отношение ширины платы  $b$  к длине  $a$ .

Амплитуда виброперемещения при резонансе, зависящая от соответствующих координат  $x$  и  $y$  (22).

Величина КМП приближенно определяется по формуле (23).

Коэффициент  $C_{fc}$  — определяется по формуле (24).

Где  $S_{1x}, S_{1y}, S_{1ax}, S_{1ay}$  — интегралы, численные значения которых определяются для конкретного расчёта [5].

$$X_1(x) = \sin \frac{\pi_1 x}{a} + A_1 \cos \frac{\pi_1 x}{a} + B_1 \operatorname{sh} \frac{\pi_1 x}{a} + C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{a}, \quad (25)$$

$$Y_1(y) = \sin \frac{\pi_1 y}{b} + A_1 \cos \frac{\pi_1 y}{b} + B_1 \operatorname{sh} \frac{\pi_1 y}{b} + C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 y}{b}, \quad (26)$$

$$a_j(x, y) = a_6 \sqrt{\left(\frac{C_k X_1(x) Y_j(y)}{\Gamma}\right)^2 + 1}, \quad (27)$$

$$n_k = \frac{\partial W_1(x_1 y)}{\partial x} \frac{a_b C_k Y_j(y)}{(2_k f_{\text{ПВ}}) \Gamma} \frac{\pi_1}{a} \left(\cos \frac{\pi_1 x}{a} + A_1 \sin \frac{\pi_1 x}{a} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{a} + C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{a}\right), \quad (28)$$

$$n_y = \frac{\partial W_1(x_1 y)}{\partial y} \frac{a_b C_k Y_j(y)}{(2_k f_{\text{ПВ}}) \Gamma} \frac{\pi_1}{y} \left(\cos \frac{\pi_1 x}{y} + A_1 \sin \frac{\pi_1 x}{y} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{y} + C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{y}\right), \quad (29)$$

$$y_1 = (x, y) = \frac{a_6 C_x E S}{2(2\Pi f_{\text{ПВ}})^2 \Gamma (1 - M^2)} \left( -\sin \frac{\pi_1 x}{a} - A_1 \cos \frac{\pi_1 x}{a} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{b} + C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{b} + M \left( -\sin \frac{\pi_1 y}{b} - A_j \cos \frac{\pi_1 y}{b} + B_j \operatorname{sh} \frac{\pi_1 y}{b} + C_j \operatorname{ch} \frac{\pi_1 y}{b} \right) \right), \quad (30)$$

$$y_2 = (x, y) = \frac{a_6 C_k E S}{2(2\Pi f_{\text{ПВ}})^2 \Gamma (1 - M^2)} \left( -\sin \frac{\pi_1 y}{a} - A_1 \cos \frac{\pi_1 y}{a} + B_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 y}{b} + C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{b} + M \left( -\sin \frac{\pi_1 x}{b} - A_j \cos \frac{\pi_1 x}{b} + B_j \operatorname{sh} \frac{\pi_1 x}{b} + C_j \operatorname{ch} \frac{\pi_1 x}{b} \right) \right), \quad (31)$$

$$y(x, y) = \sqrt{y_1(x_1 y)^2 + \pi_2(x_1 y)^2 - y_1 y_2} \quad (32)$$

Балочные функции  $X_1(x)$ ,  $Y_j(y)$  определяются по формулам (25), (26).

Значения параметров  $\pi_1$ ,  $\pi_j$  и коэффициентов  $A_1$ ,  $A_j$ ,  $B_1$ ,  $B_j$ ,  $C_1$ ,  $C_j$ , рассчитываются для конкретной платы [6].

Амплитуда виброускорения в различных точках платы рассчитывается по формуле (27).

Углы изгиба сечений ПУ вдоль осей X и Y соответственно определяются по формулам (28), (29), (30), (31), (32).

Механические напряжения в точка с координатами  $x$  и  $y$  рассчитываются по формулам, полученным на основе выражений (9), (10), (11), (22), (25), (26)

Математический аппарат, приведенный в данной статье, успешно попользуется для экспресс-анализа на начальных стадиях проектирования печатных узлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кофанов Ю.Н., Новиков А. С., Шалумов А. С. Информационная технология моделирования механических процессов в конструкциях радиоэлектронных средств. М.: Радио и связь, 2000. — 160 с.
2. Кофанов Ю.Н., Сотникова С. Ю. Информационные технологии теплового и механического моделирования радиоэлектронных средств. М.: НИУ ВШЭ, 2014. — 88 с.
3. Матвеев С.Е., Кофанов Ю. Н., Ройзман В. П. Методы системного анализа вибрационной прочности изделий. М.: Радио и связь, 2002. — 178 с.
4. Муромцев Д.Ю., Тюрин И. В., Белоусов О. А., Курносов Р. Ю. Проектирование функциональных узлов и модулей радиоэлектронных средств. Учебное пособие. — М: Издательство Лань СПб, 2018. — 252 с.
5. Токарев М.Ф., Талицкий Е. Н., Фролов В. А. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. пособие для вузов/Под ред. В. А. Фролова. — М.: Радио и связь, 1984. — 224с.
6. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. — Т. 6. /Под ред. К. В. Фролова. — М.: Машиностроение, 1981. — 456с.

© Андрюхин Александр Гаврилович ( pr1110@list.ru ), Грачев Николай Николаевич ( ngrachev@mail.ru ),

Бойко Денис Владимирович ( den87-2004@mail.ru ).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»



МИРЭА — Российский технологический университет